1. Груз массой 0,25 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v = v_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$, где *t* – время с момента начала колебаний, $T = 2$ с – период колебаний, $v_0 = 1,6$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где *m* – масса груза в килограммах, v – скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 56 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение. $E = \frac{mv^2}{2}$, где $m = 0,25$ кг,

$v = v_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$, где $v_0 = 1,6$ м/с,

$t = 56$ с,

$T = 2$ с.

Тогда

$$v = 1,6\cos\frac{2\pi\cdot 56}{2} = 1,6\cos 56\pi = 1,6\cdot 1 = 1,6;$$

$$E = \frac{0,25\cdot 1,6^2}{2} = \frac{1\cdot 1,6\cdot 1,6}{4\cdot 2} = \frac{1\cdot \overset{2}{\cancel{16}}\cdot 16}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot 2\cdot 100} = 0,32$$

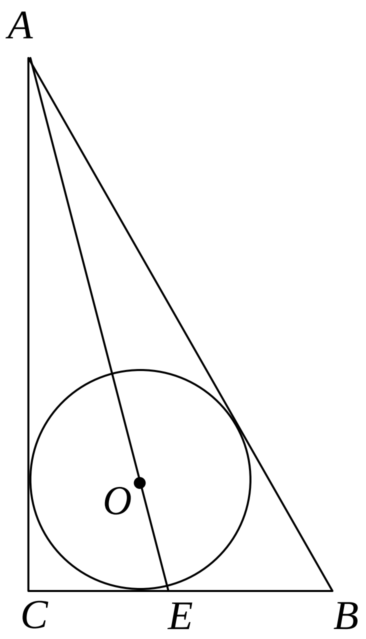
Ответ: 0,32

2. Точка O является центром окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Луч AO пересекает катет BC в точке E. Найдите гипотенузу AB, если $AC = 6\sqrt{3}$ и $\angle B$ в 4 раза больше, чем $\angle EAC$.

Решение. 1) Центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения биссектрис треугольника. Точка O, центр вписанной в треугольник ABC окружности, лежит на отрезке AE. Тогда AE – биссектриса треугольника ABC.

Следовательно, $\angle BAE = \angle EAC$.

Пусть $\angle EAC = x°$. По условию $\angle B$ в 4 раза больше, чем $\angle EAC$. Тогда $\angle B = (4x)°$, $\angle BAC = (2x)°$.



$\angle BAC$ и $\angle B$ – острые углы Прямоугольного треугольника ABC.

Тогда $2x + 4x = 90,$

$x = 15,$

$\angle EAC = 15°$, $\angle B = 60°$, $\angle BAC = 30°.$

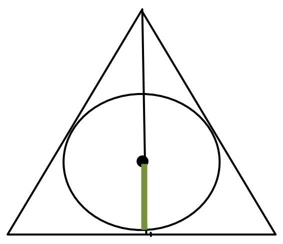
2) В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 6\sqrt{3}$, $\angle BAC = 30°$. Тогда

$$\cos(\angle BAC) = \frac{CA}{AB}, \qquad \cos 30° = \frac{6\sqrt{3}}{AB}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{AB}, \qquad AB = 12.$$

Ответ: $AB = 12$.

3. Периметр правильного треугольника равен $24\sqrt{3}$. Найдите радиус вписанной окружности.

Решение. Сторона треугольника равна $\dfrac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$. Так как треугольник



правильный, то центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис, высот, медиан треугольника. Тогда радиус вписанной окружности равен одной трети медианы треугольника.

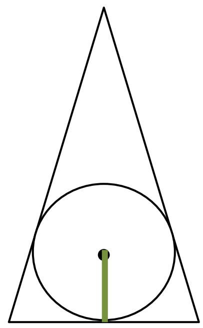
Длина медианы равна $8\sqrt{3} \cdot \sin 60° = 8\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12$. Радиус равен $\dfrac{1}{3} \cdot 12 = 4$.

Ответ: 4.

4. В равнобедренный треугольник со сторонами 5, 5, 6 вписана окружность. Найдите её радиус.

Решение. $S_\vartriangle = p\cdot r$, где $S_\vartriangle$ – площадь треугольника, p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной окружности.

Площадь треугольника найдём по формуле Герона:



$$p=\frac{5+5+6}{2}=8,$$

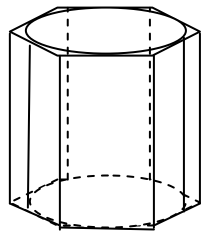
$$S_\vartriangle=\sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)}=\sqrt{16\cdot 3^2}=12.$$

Тогда имеем: $12=8r \quad \Leftrightarrow \quad r=1{,}5$

Ответ: 1,5.

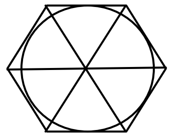
5. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 3.

Решение. Рассмотрим верхние основания призмы и цилиндра, располагая их во фронтальной плоскости. Окружность вписана в правильный шестиугольник. Тогда $S_{6-уг.}=p\cdot r$, где p – полупериметр шестиугольника, а r – радиус круга.



$$p=\frac{6a}{2}=3a,$$

$$r=\sqrt{3},$$



$$S_{6-уг.}=6\cdot\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ=3a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1{,}5a^2\sqrt{3}.$$

$$1{,}5a^2\sqrt{3}=3a\cdot\sqrt{3},\quad a=2.$$

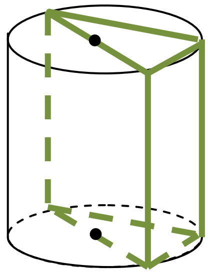
Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 2.

Тогда площадь боковой поверхности призмы равна $6\cdot 2\cdot 3=36$.

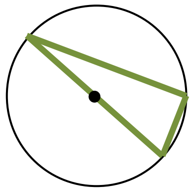
Ответ: 36.

6. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые рёбра призмы равны $\frac{6}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

Решение. Рассмотрим верхние основания призмы и цилиндра, располагая их во фронтальной плоскости. Окружность описана около прямоугольного треугольника. Тогда гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром основания цилиндра.



$(2R)^2 = 6^2 + 8^2, \qquad 4R^2 = 36 + 64, \qquad 4R^2 = 100, \qquad R = 5.$



5 – радиус цилиндра.

Тогда $V = \pi R^2 \cdot H, \qquad V = \pi \cdot 5^2 \cdot \dfrac{6}{\pi} = 150.$

Ответ: 150.

7. Найдите $f(x) - f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, если $f(x) = \left(x - \dfrac{9}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x} - 9x\right)$, где $x \neq 0$

Решение. Так как $f(x) = \left(x - \dfrac{9}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x} - 9x\right)$ при $x \neq 0$, то

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x} - 9 : \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 : \frac{1}{x} - 9 \cdot \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x} - 9x\right) \cdot \left(x - \frac{9}{x}\right) = f(x).$$

Тогда $f(x) - f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0.$

Ответ: 0.

8. а) Решите уравнение $\cos x + \dfrac{1}{\cos x} + \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{3}{4}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5; -4]$

Решение. а) Так как $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, то $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$. Следовательно,

$$\cos x+\frac{1}{\cos x}+\cos^2 x+\operatorname{tg}^2 x=\frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x+\frac{1}{\cos x}+\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)+\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{7}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos^2 x+2\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)-2+\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{7}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)^2+\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)-\frac{15}{4}=0.$$

Пусть $\cos x+\dfrac{1}{\cos x}=t$. Тогда имеем:

$$t^2+\mathrm{t}-\frac{15}{4}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4t^2+4\mathrm{t}-15=0.$$

$$D=16+240=256=16^2,$$

$$t_{1,2}=\frac{-4\pm 16}{8}=\frac{-1\pm 4}{2},$$

$$t_1=\frac{-5}{2}, \qquad t_2=\frac{3}{2}.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x+\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{-5}{2} \\ \cos x+\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{2\cos^2 x+5\cos x+2}{2\cos x}=0, \\ \dfrac{2\cos^2 x-3\cos x+2}{2\cos x}=0\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\cos^2 x+5\cos x+2=0, \\ 2\cos x\neq 0\end{cases} \\ \begin{cases}2\cos^2 x-3\cos x+2=0, \\ 2\cos x\neq 0\end{cases}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}2\cos^2 x+5\cos x+2=0, \\ 2\cos^2 x-3\cos x+2=0\end{array}\right.$$

Пусть $\cos x=a$. Тогда

$2a^2+5a+2=0,$ или $2a^2-3a+2=0,$

$\mathrm{D}=25-16=9,$ $D=9-16=-7.$

$a_{1,2}=\dfrac{-5\pm 3}{4},$ Нет корней

$a_1=-2, \qquad a_2=-\dfrac{1}{2}$

Имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=-2,\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \cos x=-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z},\\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) $[-5;-4]$.

<table>
<tr>
<td>

1) $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.$

$-5\le\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\le-4, \quad k\in\mathbb{Z},$

$-5-\dfrac{2\pi}{3}\le 2\pi k\le-4-\dfrac{2\pi}{3}, \quad k\in\mathbb{Z},$

$\dfrac{-15-2\pi}{3}\le 2\pi k\le\dfrac{-12-2\pi}{3}, \quad k\in\mathbb{Z},$

$\dfrac{-15-2\pi}{6\pi}\le k\le\dfrac{-12-2\pi}{6\pi}, \quad k\in\mathbb{Z},$

$k=-1.$

Тогда $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi\cdot(-1)=-\dfrac{4\pi}{3}.$

</td>
<td>

2) $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.$

$-5\le-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\le-4, \quad k\in\mathbb{Z},$

$-5+\dfrac{2\pi}{3}\le 2\pi k\le-4+\dfrac{2\pi}{3}, \quad k\in\mathbb{Z},$

$\dfrac{-15+2\pi}{3}\le 2\pi k\le\dfrac{-12+2\pi}{3}, \quad k\in\mathbb{Z},$

$\dfrac{-15+2\pi}{6\pi}\le k\le\dfrac{-12+2\pi}{6\pi}, \quad k\in\mathbb{Z}.$

Нет решений в целых числах.

</td>
</tr>
</table>

Ответ: а) $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{4\pi}{3}$.

9. а) Решите уравнение $\left(2\sin^2 x-3\sin x+1\right)\sqrt{\operatorname{tg}x}=0$

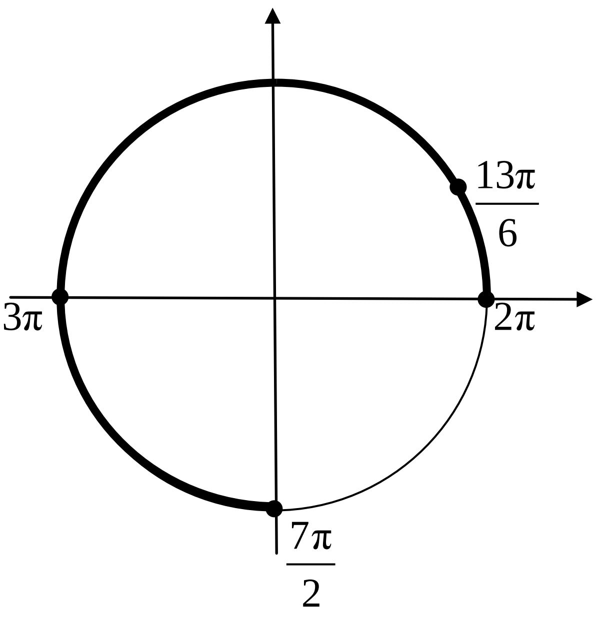
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$

Решение. а) $\left(2\sin^2 x-3\sin x+1\right)\sqrt{\operatorname{tg}x}=0 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0, \\ \sqrt{\operatorname{tg} x} = 0 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \operatorname{tg} x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x = 0 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x \neq 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos x \neq 0, \\ \operatorname{tg} x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

б) $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2} \right]$



$x = 2\pi$

$x = 2\pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{13\pi}{6}$

$x = 2\pi + \pi = 3\pi$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$ б) 2π; $\dfrac{13\pi}{6}$; 3π.

10. а) Решите уравнение $\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{16\pi}{3}\right)$

Решение. а) Так как $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, то

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12} + x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{12} + x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{12} + x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) $\left[4\pi; \frac{16\pi}{3}\right)$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 4\pi \le x < \frac{16\pi}{3}. \end{cases}$$

$$4\pi \le \frac{5\pi}{12} + \pi k < \frac{16\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$4 \le \frac{5}{12} + k < \frac{16}{3}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$4 - \frac{5}{12} \le k < \frac{16}{3} - \frac{5}{12}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{43}{12} \le k < \frac{59}{12}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$3\frac{7}{12} \le k < 4\frac{11}{12}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$k = 4.$

Тогда $x = \frac{5\pi}{12} + \pi \cdot 4 = \frac{53\pi}{12}.$

Ответ: а) $\frac{5\pi}{12}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z};$ б) $\frac{53\pi}{12}$.

11. Решите уравнение

$$\log_2^2\left(4\cos^2 x\right)-8\log_2\left(2\cos x\right)+3=0$$

Решение

$$\log_2^2\left(4\cos^2 x\right)-8\log_2\left(2\cos x\right)+3=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4\cos^2 x>0, \\ 2\cos x>0, \\ \left(\log_2\left(2\cos x\right)^2\right)^2-8\log_2\left(2\cos x\right)+3=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x>0, \\ \left(2\log_2\left(2\cos x\right)\right)^2-8\log_2\left(2\cos x\right)+3=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x>0, \\ 4\left(\log_2\left(2\cos x\right)\right)^2-8\log_2\left(2\cos x\right)+3=0. \end{cases}$$

Пусть $\log_2\left(2\cos x\right)=t$. Тогда

$$4t^2-8t+3=0,$$

$$D=64-48=16,$$

$$t_{1,2}=\frac{8\pm4}{8},$$

$$t_1=\frac{1}{2}, \qquad t_2=\frac{3}{2}.$$

Имеем:

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x>0, \\ \left[\begin{array}{l} \log_2\left(2\cos x\right)=\frac{1}{2}, \\ \log_2\left(2\cos x\right)=\frac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2\left(2\cos x\right)=\frac{1}{2}, \\ \cos x>0, \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2\left(2\cos x\right)=\frac{3}{2}, \\ \cos x>0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2\cos x=\sqrt{2}, \\ 2\cos x=2\sqrt{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x=\sqrt{2}\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z},\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\quad -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$

12. Решите уравнение

$$\frac{(\operatorname{ctg}(\pi-x))\cdot\log_{45}(2\sin^2 x)}{\log_{54}(\sqrt{2}\cos x)}=0$$

Решение

$$\frac{(\operatorname{ctg}(\pi-x))\cdot\log_{45}(2\sin^2 x)}{\log_{54}(\sqrt{2}\cos x)}=0\ \Leftrightarrow\ \frac{-\operatorname{ctg}x\cdot\log_{45}(2\sin^2 x)}{\log_{54}(\sqrt{2}\cos x)}=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\sin x\neq 0,\\ 2\sin^2 x>0,\\ \sqrt{2}\cos x>0,\\ \log_{45}(\sqrt{2}\cos x)\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg}x=0,\\ \log_{45}(2\sin^2 x)=0\end{array}\right.\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\sin x>0,\\ \cos x>0,\\ \sqrt{2}\cos x\neq 1,\\ \left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg}x=0,\\ 2\sin^2 x=1\end{array}\right.\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\sin x>0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg}x=0,\\ \sin^2 x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\sin x>0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg}x=0,\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\operatorname{ctg} x=0,\\ \sin x>0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x>0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Все три системы противоречивы, ни одна из них не имеет решений.
Ответ: исходное уравнение не имеет корней (решений).

13. Решите неравенство

$$2(x-3)^2+(x-3)\sqrt{x}>x$$

Решение

$$2(x-3)^2+(x-3)\sqrt{x}>x \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x\geq 0,\\ 2\left((x-3)^2+\dfrac{1}{2}(x-3)\sqrt{x}\right)>x\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x\geq 0,\\ 2\left((x-3)^2+2\cdot(x-3)\dfrac{\sqrt{x}}{4}+\dfrac{x}{16}\right)-\dfrac{x}{8}>x\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ 2\left(x-3+\dfrac{\sqrt{x}}{4}\right)^2-\dfrac{9x}{8}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ \left(x-3+\dfrac{\sqrt{x}}{4}\right)^2-\dfrac{9x}{16}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ \left(x-3+\dfrac{\sqrt{x}}{4}\right)^2-\left(\dfrac{3\sqrt{x}}{4}\right)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ \left(x-3+\dfrac{\sqrt{x}}{4}-\dfrac{3\sqrt{x}}{4}\right)\left(x-3+\dfrac{\sqrt{x}}{4}+\dfrac{3\sqrt{x}}{4}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ \left(x-3-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(x-3+\sqrt{x}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(2x-\sqrt{x}-6\right)\left(x+\sqrt{x}-3\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$2t^2-t-6=0,$$

$$t_{1,2}=\frac{1\pm 7}{4},$$

$$t_1=-\frac{3}{2}, \qquad t_2=2.$$

Следовательно, $2x-\sqrt{x}-6=2\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{2}\right)\left(\sqrt{x}-2\right).$

$$t^2+t-3=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Следовательно, $x+\sqrt{x}-3=$

$$=\left(\sqrt{x}+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{1}{2} \cdot 2\left(\sqrt{x}+\frac{3}{2}\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} > 2, \\ \sqrt{x} < \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x < \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^2, \\ x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x < \frac{14-2\sqrt{13}}{4}, \\ x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x < \frac{7-\sqrt{13}}{2}, \\ x > 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left[0; \frac{7-\sqrt{13}}{2}\right) \cup (4; +\infty).$

14. Решите неравенство $\log_3\left(2^x+1\right)+\log_{2^x+1} 3 \geq 2,5$

Решение

$$\log_3\left(2^x+1\right)+\log_{2^x+1} 3 \geq 2,5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x+1 > 0, \\ 2^x+1 \neq 1, \\ \log_3\left(2^x+1\right)+\frac{\log_3 3}{\log_3\left(2^x+1\right)} \geq 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

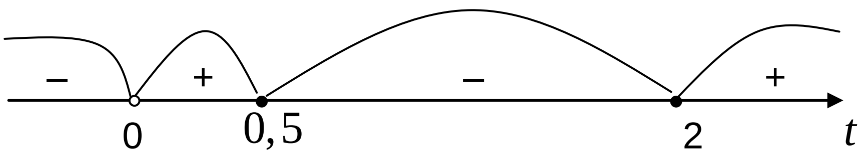
$$\Leftrightarrow \log_3\left(2^x+1\right)+\frac{1}{\log_3\left(2^x+1\right)} \geq \frac{5}{2}.$$

Пусть $\log_3\left(2^x+1\right)=t$. Тогда

$$t+\frac{1}{t}\ge\frac{5}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2t^2-5t+2}{2t}\ge 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-2)}{2t}\ge 0\quad\Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}2t^2-5t+2=0,\\ D=25-16=9,\\ t_{1,\,2}=\dfrac{5\pm 3}{4},\\ t_1=\dfrac{1}{2},\qquad t_2=2.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-2)}{t}\ge 0\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}0<t\le\dfrac{1}{2},\\ t\ge 2.\end{array}\right.$$



Так как $t=\log_3\left(2^x+1\right)$, то

$$\left[\begin{array}{l}0<\log_3\left(2^x+1\right)\le\dfrac{1}{2},\\ \log_3\left(2^x+1\right)\ge 2\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\log_3 1<\log_3\left(2^x+1\right)\le\log_3\sqrt{3},\\ \log_3\left(2^x+1\right)\ge\log_3 9\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}1<2^x+1\le\sqrt{3},\\ 2^x+1\ge 9\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}0<2^x\le\sqrt{3}-1,\\ 2^x\ge 8\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}2^x\le 2^{\log_2\left(\sqrt{3}-1\right)},\\ 2^x\ge 2^3\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x\le\log_2\left(\sqrt{3}-1\right),\\ x\ge 3.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\,\log_2\left(\sqrt{3}-1\right)\right]\cup\left[3;\,+\infty\right)$

15. Решите неравенство $\dfrac{x+6\sqrt{x}+28}{120} \le \dfrac{2-\sqrt{x}}{x-6\sqrt{x}+8}$

Решение. По смыслу задания $x \ge 0$. Тогда $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$,

$$\frac{x+6\sqrt{x}+28}{120} \le \frac{2-\sqrt{x}}{x-6\sqrt{x}+8} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2+6\sqrt{x}+28}{120} \le \frac{2-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-6\sqrt{x}+8}.$$

Пусть $\sqrt{x}=t$.

$$\frac{t^2+6t+28}{120} \le \frac{2-t}{t^2-6t+8} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2+6t+28}{120} \le \frac{\overset{1}{\cancel{2-t}}}{\underset{-1}{\cancel{(t-2)}}(t-4)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} t^2-6t+8=0, \\ D=36-32=4, \\ t_{1,2}=\dfrac{6\pm 2}{2}=3\pm 1, \\ t_1=2, \qquad t_2=4. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{t^2+6t+28}{120} \le \dfrac{1}{4-t}, \\ t \ne 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{t^2+6t+28}{120} - \dfrac{1}{4-t} \le 0, \\ t \ne 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\left(t^2+6t+28\right)\left(4-t\right)-120}{120\left(4-t\right)} \le 0, \\ t \ne 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{4t^2-t^3+24t-6t^2+112-28t-120}{120\left(4-t\right)} \le 0, \\ t \ne 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{-t^3-2t^2-4t-8}{120\left(4-t\right)} \le 0, \\ t \ne 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{-\left(\left(t^3+2t^2\right)+\left(4t+8\right)\right)}{120\left(4-t\right)} \le 0, \\ t \ne 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{-(t+2)(t^2+4)}{120(4-t)} \le 0 \\ t \ne 2 \end{cases}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{t+2}{120(t-4)} \le 0, \\ t \ne 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2 \le t < 4, \\ t \ne 2. \end{cases}$$

Так как $t = \sqrt{x}$, то

$$\begin{cases} -2 \le \sqrt{x} < 4, \\ \sqrt{x} \ne 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{x} < 4, \\ \sqrt{x} \ne 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \le x < 16, \\ x \ne 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 0 \le x < 4, \\ 4 < x < 16. \end{array} \right.$$

Ответ: $x \in [0; 4) \cup (4; 16)$.

16. Дано двузначное натуральное число.

а) Оказалось, что частное этого числа и суммы его цифр равно 7. Найдите все такие числа.

б) Какие натуральные значения может принимать частное данного числа и суммы его цифр?

Решение. Пусть A – двузначное число, соответствующее условию задачи, x – цифра в разряде десятков, y – цифра в разряде единиц. Тогда $A = \overline{xy} = 10x + y$.

1-й способ решения: а) $\dfrac{A}{x+y} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad A = 7(x+y).$

То есть A кратно 7.

Продолжим решение методом перебора.

1) $A = 7 \cdot 1 = 7$. Однозначное число. Не соответствует условию задачи.

2) $A = 7 \cdot 2 = 14$. Но $\left.\dfrac{14}{1+4} \ne 7\right| \quad \Rightarrow \quad A \ne 14.$

3) $A = 7 \cdot 3 = 21. \qquad \left.\dfrac{21}{2+1} = 7\right| \quad \Rightarrow \quad A = 21.$

4) $A = 7 \cdot 4 = 28$. Но $\left.\dfrac{28}{2+8} \ne 7\right| \quad \Rightarrow \quad A \ne 28.$

5) $A = 7 \cdot 5 = 35$. Но $\left.\dfrac{35}{3+5} \ne 7\right| \quad \Rightarrow \quad A \ne 35.$

6) $A = 7 \cdot 6 = 42. \qquad \left.\dfrac{42}{4+2} = 7\right| \quad \Rightarrow \quad A = 42.$

7) $A = 7 \cdot 7 = 49$. Но $\left.\frac{49}{4+9} \neq 7\right| \quad \Rightarrow \quad A \neq 49.$

8) $A = 7 \cdot 8 = 56$. Но $\left.\frac{56}{5+6} \neq 7\right| \quad \Rightarrow \quad A \neq 56.$

9) $A = 7 \cdot 9 = 63.$ $\quad \left.\frac{63}{6+3} = 7\right| \quad \Rightarrow \quad A = 63.$

10) $A = 7 \cdot 10 = 70$. Но $\left.\frac{70}{7+0} \neq 7\right| \quad \Rightarrow \quad A \neq 70.$

11) $A = 7 \cdot 11 = 77$. Но $\left.\frac{77}{7+7} \neq 7\right| \quad \Rightarrow \quad A \neq 77.$

12) $A = 7 \cdot 12 = 84.$ $\quad \left.\frac{84}{8+4} = 7\right| \quad \Rightarrow \quad A = 84.$

13) $A = 7 \cdot 13 = 91$. Но $\left.\frac{91}{9+1} \neq 7\right| \quad \Rightarrow \quad A \neq 91.$

14) $A = 7 \cdot 14 = 98$. Но $\left.\frac{98}{9+8} \neq 7\right| \quad \Rightarrow \quad A \neq 98.$

15) $A = 7 \cdot 15 = 105.$ Трёхзначное число. Не соответствует условию задачи.

Методом перебора нашли все двузначные числа, соответствующие условию задачи и доказали, что других чисел нет.

$A = 21; \quad 42; \quad 63; \quad 84.$

2-й способ решения.

$$\frac{A}{x+y} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad A = 7(x+y),$$

$$10x + y = 7x + 7y \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 6y \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y.$$

Цифра десятков в 2 раза больше цифры единиц.

Так как x – первая цифра двузначного числа, то

$1 \leq x \leq 9$. Тогда $1 \leq 2y \leq 9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{9}{2}$.

Следовательно, $y \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Если $y = 1$, то $x = 2, \quad A = 21.$

Если $y = 2$, то $x = 4, \quad A = 42.$

Если $y=3$, то $x=6, \quad A=63.$

Если $y=4$, то $x=8, \quad A=84.$

Четыре числа: 21; 42: 63; 84, удовлетворяют условию задачи.
Ответ: а) 21; 42; 63; 84.

б) Найдём все натуральные значения k такие, что

$$\frac{A}{x+y}=k \quad \Leftrightarrow \quad A=k\left(x+y\right),$$

$$10x+y=kx+ky \quad \Leftrightarrow \quad \left(10-k\right)x=\left(k-1\right)y.$$

Так как k – натуральное число, а y – цифра в разряде единиц, то $\left(k-1\right)y\geq 0$.

Тогда $\left(10-k\right)x\geq 0$.

Так как x – цифра в разряде десятков, то $10-k\geq 0$.

Имеем: $\begin{cases} k\geq 1, \\ 10-k\geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k\geq 1, \\ k\leq 10 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 1\leq k\leq 10.$

1) Если $k=1$, то $\left(10-1\right)x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$, что противоречит смыслу задачи (первая цифра двузначного числа не может быть нулём).

Следовательно, $k\neq 1$.

2) Дробь $\frac{A}{x+y}$ может принимать значение 2. Например, $\frac{18}{1+8}=2$.

3) Дробь $\frac{A}{x+y}$ может принимать значение 3. Например, $\frac{27}{2+7}=3$.

4) Дробь $\frac{A}{x+y}$ может принимать значение 4. Например, $\frac{36}{3+6}=4$.

5) Дробь $\frac{A}{x+y}$ может принимать значение 5. Например, $\frac{45}{4+5}=5$.

6) Дробь $\frac{A}{x+y}$ может принимать значение 6. Например, $\frac{54}{5+4}=6$.

7) Дробь $\frac{A}{x+y}$ может принимать значение 7. Например, $\frac{63}{6+3}=7$.

8) Дробь $\frac{A}{x+y}$ может принимать значение 8. Например, $\frac{72}{7+2}=8$.

9) Дробь $\frac{A}{x+y}$ может принимать значение 9. Например, $\frac{81}{8+1}=9$.

10) Дробь $\frac{A}{x+y}$ может принимать значение 10. Например, $\frac{90}{9+0}=10$.

Значения, большие 10, дробь принимать не может (доказано ранее).
Ответ: б) 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.