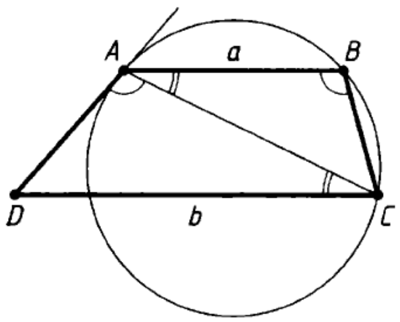
Подобие треугольников в задачах с окружностями

Часто ключом к решению непростых задач с окружностями является отыскание или дополнительное построение пары подобных треугольников.

Задача1[1]. В трапеции ABCD основания $AB = a$, $CD = b\ (a < b)$. Окружность проходящая через вершины A, B и C, касается стороны AD. Найдите диагональ AC.



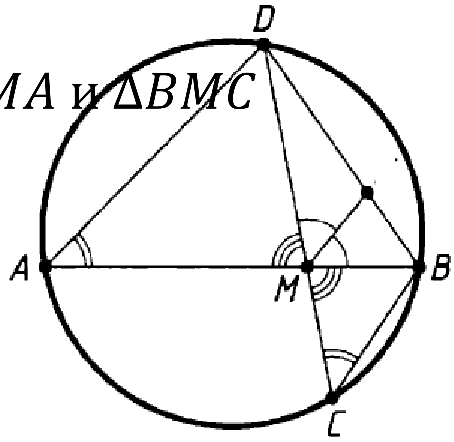
Решение. Рассмотрим ΔABC и ΔACD.

$$\left.\begin{array}{r} \angle ACD = \angle BAC\ (\text{накр. леж.}) \\ \angle CAD = \angle CBA = \frac{1}{2} \smile AC \end{array}\right| \xRightarrow{I\ \text{пр.подобия}} \Delta ABC \sim \Delta CAD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow AC = \sqrt{ab}.$$

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Задача 2. В круге проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M, L – точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой BD. Найдите отрезки BL и LD, если $BD = a$, а площади ΔCMB и ΔAMD относятся как $b : c$.

[1] Источник [1].



Решение. Рассмотрим ΔDMA и ΔBMC

$$\left.\begin{aligned}&\angle CMB = \angle AMD \text{ (вертикальные)}\\ &\angle DCB = \angle DAB = \frac{1}{2} \smile AB \text{(вписанные)}\end{aligned}\right| \Rightarrow$$

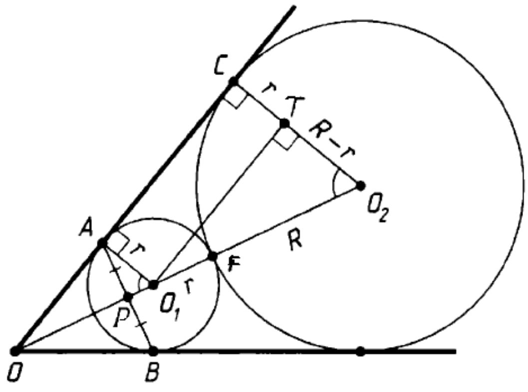
$$\left.\begin{aligned}&\xRightarrow{I \text{ пр.под}} \Delta DMA \sim \Delta BMC\\ &\text{Пусть } k - \text{коэффициент подобия.}\end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{S_{\Delta CMB}}{S_{\Delta AMD}} = k^2 = \frac{b}{c} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{b}{c}}$$

ML – биссектриса $\Delta DMB \xRightarrow{\text{св.биссектрисы}} \frac{BL}{LD} = \frac{MB}{MD} = \sqrt{\frac{b}{c}} \Rightarrow BL = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}a, DL = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}a.$

Ответ: $BL = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}a, DL = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}a.$

Задача 3[2]. В угол вписаны, касающиеся внешним образом окружности радиусов r и R $(r < R)$. Первая из них касается сторон угла в точках A и B. Найдите AB.

[2] Источник [1].



Решение. Проведем $OT: OT \perp CO_2, OT \cap CO_2 = T$.

По свойству окружностей, касающихся внешним образом $O_1O_2 = r + R$.

$$\left.\begin{matrix} AO_1 \perp SC \\ CO_2 \perp SC \end{matrix}\right| \Rightarrow AO_1 || CO_2$$

$$\Rightarrow ACO_1O_2 - \text{прямоугольная трапеция.}$$

$TO_2 = R - r$

Рассмотрим прямоугольный ΔTO_1O_2.

$$\left.\begin{matrix} O_1O_2 = R + r \\ O_1T = R - r \end{matrix}\right| \xRightarrow{\text{т. Пифагора}} O_1T = 2\sqrt{Rr}.$$

Проведем $SO_1, SO_1 \cap AB = P$.

Рассмотрим ΔTO_1O_2 и ΔAO_1P.

$$\left.\begin{matrix} \angle O_1TO_2 = \angle APO_1 = 90^0 \\ \angle SO_1A = \Delta SO_2C \text{ (соответственные)} \end{matrix}\right| \Rightarrow$$

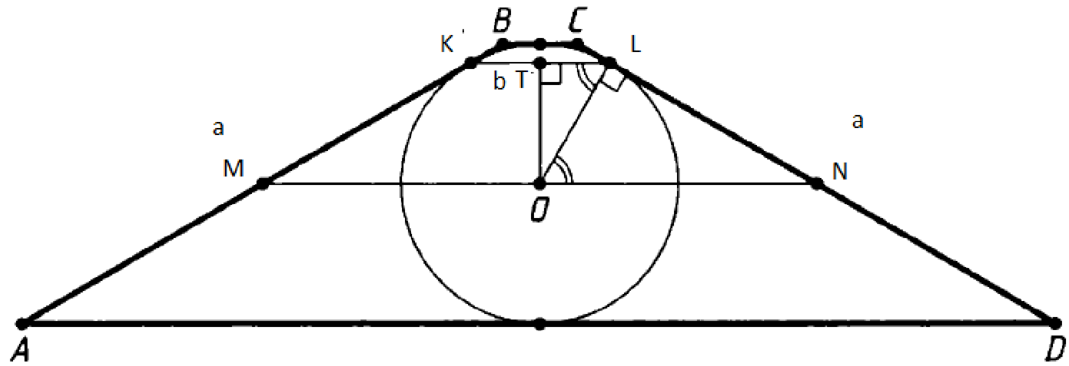
$\Delta O_1TO_2 \sim \Delta APO_1$.

$$\frac{AP}{AO_1} = \frac{O_1T}{O_1O_2} \Rightarrow AP = \frac{2r\sqrt{rR}}{r + R}$$

$$AB = 2AP = \frac{4r\sqrt{rR}}{r + R}.$$

Ответ: $AB = \frac{4r\sqrt{rR}}{r+R}$.

Задача 4. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона равна a, отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью равен b. Найдите диаметр окружности ($b < a$).



Решение: Пусть MN – средняя линия ABCD.

Окружность вписана в ABCD $\Rightarrow$AB+CD=BC+AD=2a $\Rightarrow MN = \frac{\text{BC+AD}}{2} = a$.

Точка O – середина MN $\Rightarrow$ OM=$\frac{a}{2}$.

Проведем OT: OT$\perp$KL, T$\in KL$.

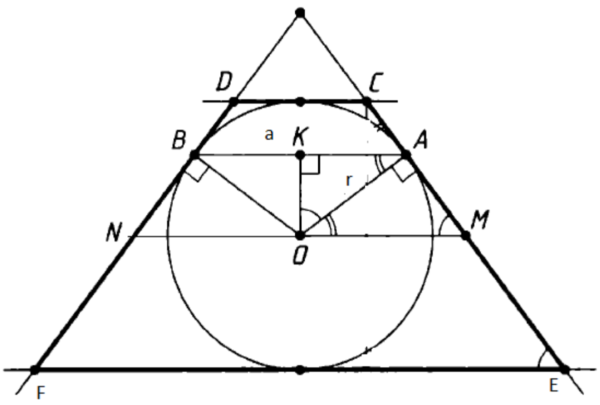
Рассмотрим ΔTOL и ΔMOL.

$$\left.\begin{array}{r}\angle LTO = \angle OLM = 90^0 \\ \angle TLO = \angle LOM \text{ (накр. леж.)}\end{array}\right| \xrightarrow{I \text{ пр.подобия}} \Delta TLO \sim \Delta LOM$$

$$\Rightarrow \frac{LO}{OM} = \frac{TL}{LO} \Rightarrow LO = \frac{\sqrt{ab}}{2} - \text{радиус вписанной окружности.}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{ab}}{2}$.

Задача 5. В некоторый угол вписана окружность радиуса r. Хорда, соединяющая точки касания, равна a. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найдите стороны полученной трапеции.



Решение.

Аналогично, как в задаче 4 доказывается, что $\Delta AOT \sim \Delta OMA$.

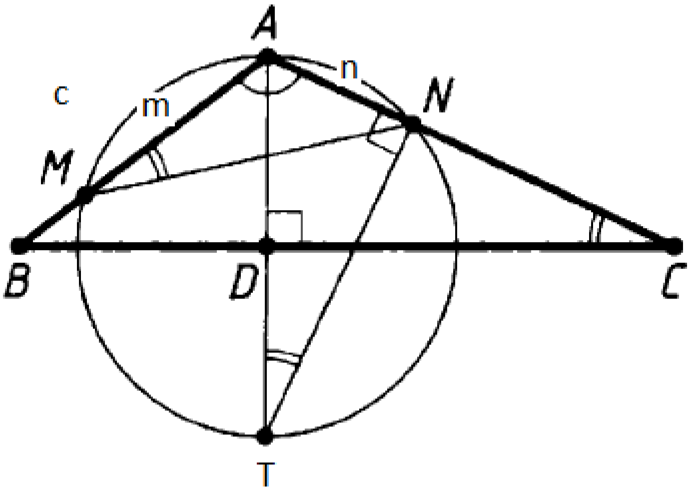
Значит, $\frac{AT}{OA} = \frac{AO}{OM} \Rightarrow$ $OM = \frac{2r^2}{a} \Rightarrow MN = \frac{4r^2}{a} \Rightarrow$ $CD + DF = \frac{8r^2}{a} \Rightarrow CE + DF =$ $\frac{8r^2}{a}$ (свойство четырехугольника, в который можно вписать окружность).

Трапеция равнобедренная $\Rightarrow CE = DF = \frac{4r^2}{a}$.

Ответ: $\frac{4r^2}{a}$.

Задача 6. Из вершины тупого угла A ΔABC опущена высота AD. Проведена окружность с центром в точке D, радиусом равным AD. Она пересекает стороны AB и AC в точках M и N

соответственно. Найдите сторону AC, если известно, что $AB = c, AM = m,\ AN = n$.



Решение:

Дополнительное построение:

Продлим AD до пересечения с окружностью ω.

$$\omega \cap AD = A, T.$$

$$D \in AT \Rightarrow AT - \text{диаметр} \Rightarrow \angle ANT = 90^0.$$

Рассмотрим ΔANT и ΔADC.

$$\left.\begin{array}{c} \angle A - \text{общий} \\ \angle ANT = \angle ADC = 90^0 \end{array}\right| \Rightarrow \angle ATN = \angle DCA$$

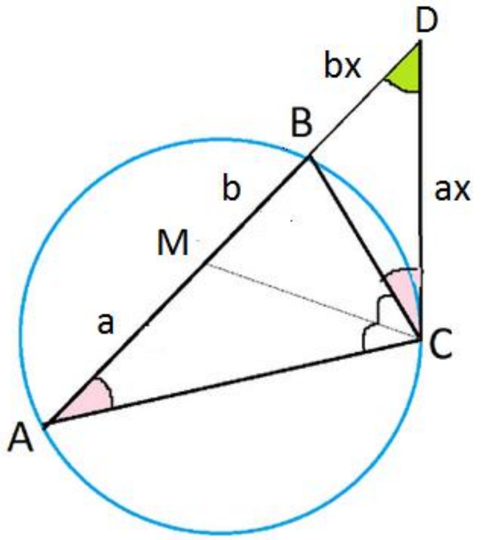
С другой стороны $\angle ATN = \angle AMN = \frac{1}{2} \smile AN \Rightarrow \angle AMN = \angle DCA$.

Рассмотрим ΔAMN и ΔACB.

$$\left.\begin{array}{c} \angle AMN = \angle DCA \\ \angle A - \text{общий} \end{array}\right| \xRightarrow{I \text{ пр.подобия}} \Delta AMN \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow AC = \frac{cm}{n}.$$

Ответ: $AC = \frac{cm}{n}$.

Задача 7 (аналог задачи 324602 из банка ОГЭ).



Биссектриса CM делит сторону AB на отрезки, $AM = a$ и $BM = b$ $(a > b)$. Касательная к описанной окружности ΔABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

Решение. Рассмотрим ΔADC и ΔCDB.

$\angle DAC = \angle DCB = \frac{1}{2} \smile CB$ (по теоремам о вписанном угле и об угле между хордой и касательной)

$\angle D$ – общий.

Значит, $\Delta ADC \sim \Delta CDB$ по первому признаку подобия

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{DB}. \quad (1)$$

Рассмотрим ΔCAB. По свойству биссектрисы

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AM}{MB} = \frac{a}{b}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$\frac{CD}{DB} = \frac{a}{b}.$$

По теореме о секущей и касательной

$$CD^2 = AD \cdot DB. \qquad (3)$$

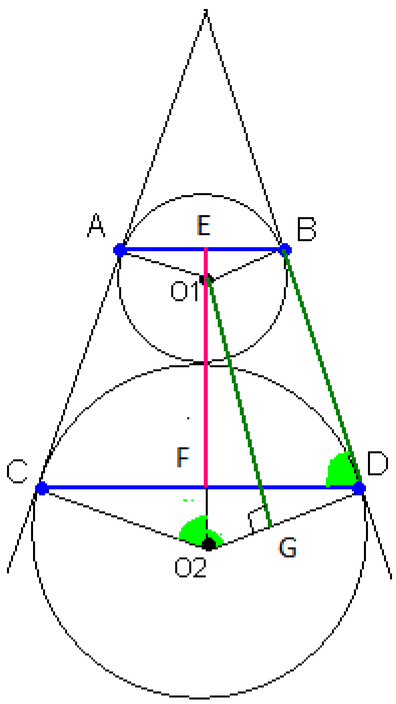
Пусть $DB = bx$, тогда $AD = (bx + a + b), CD = ax$.

Основываясь на формуле (3), составим и решим уравнение

$$a^2x^2 = bx(bx + a + b) \Rightarrow x = \frac{b}{a-b} \Rightarrow CD = \frac{ab}{a-b}.$$

Ответ: $CD = \frac{ab}{a-b}$.

Задача 8 (аналог задачи 324609 из банка ОГЭ).



Окружности радиусов r и R ($r < R$) касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D – на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Решение. $\Delta GO_1O_2 \sim \Delta EAO_1$ доказательство этого факта было приведено в задаче 3.

$$\frac{GO_2}{EO_1} = \frac{O_1O_2}{AO_1} \Rightarrow EO_1 = \frac{r(R-r)}{R+r}.$$

Рассмотрим ΔAEO_1 и ΔCFO_2

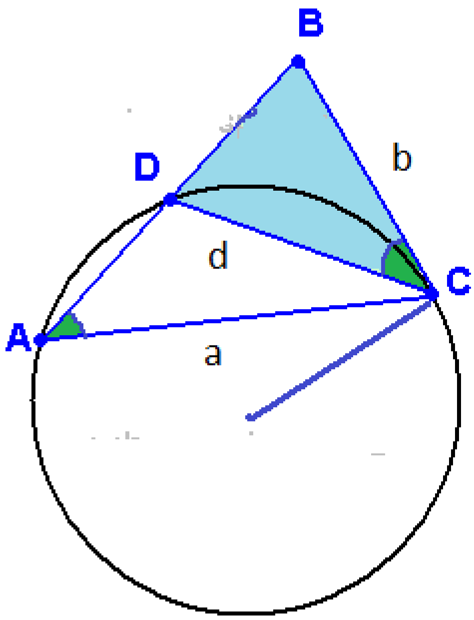
$$\left.\begin{array}{c}\angle AEO_1 = \angle CFO_2 = 90^0 \\ \angle AO_1E = \angle CO_2F \text{ (соответ.)}\end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Delta AEO_1 \sim \Delta CFO_2 \ \Rightarrow \frac{AO_1}{EO_1} = \frac{CO_2}{FO_2} \Rightarrow FO_2 = \frac{R(R-r)}{R+r}.$$

$$EF = O_1O_2 + EO_1 - FO_2 = \frac{4rR}{R+r}.$$

Ответ: $\frac{4rR}{R+r}$.

Задача 9 (аналог задачи 324611 из банка ОГЭ). На стороне AB треугольника ABC взята точка D так, что окружность проходит через точки A, C, D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AC = a, BC = b, CD = d$ $(a > d)$.



Решение. Рассмотрим ΔABC и ΔCDB.

$\angle DCB = \angle CAB = \frac{1}{2} \smile CD$ (по теоремам о вписанном угле и об угле между хордой и касательной)

$\angle$B – общий.

Значит, $\Delta ACB \sim$ ΔCDB по первому признаку подобия

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow DB = \frac{ab}{d}.$$

Пусть $DA = x$, тогда $AB = DB + BA = x + \frac{ab}{d}$.

По теореме о секущей и касательной

$$CB^2 = AB \cdot DB.$$

$$\left(x + \frac{ab}{d}\right)\frac{ab}{d} = b^2$$

$$x = \frac{b(d^2 - a^2)}{ad}.$$

Ответ: $AD = \frac{b(d^2-a^2)}{ad}$.

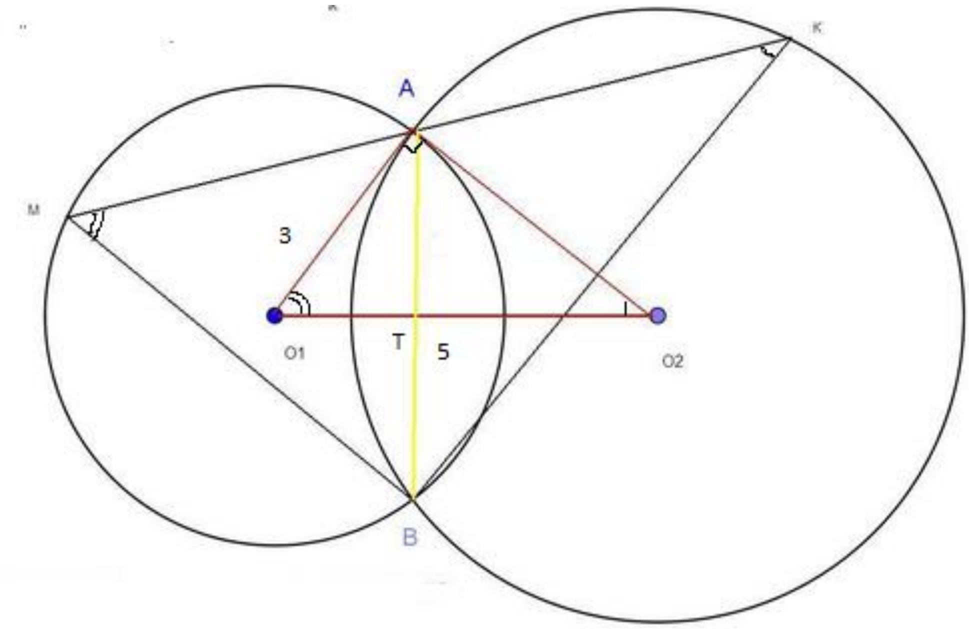
Задача 10 (Пример задания 16 ЕГЭ 2017 профиль)[3]. Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 3, 4 пересекаются в точках A и B, причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая эти окружности в точках M и K, причем точка A лежит между точками M и K.

а) Докажите, что треугольники MBK и O_1AO_2 подобны;

б)Найдите расстояние от точки B до MK, если MK=7, а $O_1O_2 = 5$.

---

[3] http://alexlarin.net/ege/2017/16_2017.html



Решение. а) Пользуясь фактом, что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна прямой, соединяющей центры окружностей, получим $AB \perp O_1O_2$. Пусть $AB \cap O_1O_2 = T$.

Рассмотрим ΔO_1AB.

OA=OB (радиусы)⇒ ΔO_1AB – равнобедренный.

$O_1T -$ высота $\Rightarrow O_1T -$ биссектриса.

Аналогично, $O_2T -$ биссектриса ΔO_2AB.

Рассмотрим ΔMBK и $\Delta O_1A\text{O}_2$.

∠AMB=$\frac{1}{2}\smile AB$ (вписанный угол)

$$\left.\begin{array}{r}\angle AO_1B = \smile AB \text{ (центральный угол)} \\ O_1T - \text{биссектриса}\end{array}\right| \Rightarrow \angle AO_1T = \frac{1}{2}\smile AB$$

Значит, ∠AMB=$\angle AO_1T$.

Аналогично ∠AKB=$\angle AO_2T$.

По первому признаку подобия $\Delta MBK \sim \Delta O_1AO_2$.

б) 3,4,5 – Пифагорова тройка $\Rightarrow$ ΔO_1AO_2 – прямоугольный $\angle A=90^0$.

$$S_{\Delta O_1AO_2} = \frac{1}{2}O_1A \cdot AO_2 = 6.$$

Пусть AH -высота треугольника ΔO_1AO_2, тогда

$$S_{\Delta O_1AO_2} = \frac{1}{2}O_1O_2 \cdot AH = 2{,}5AH.$$

$$AH = 2{,}4.$$

Пусть BW -высота треугольника ΔMBK, тогда

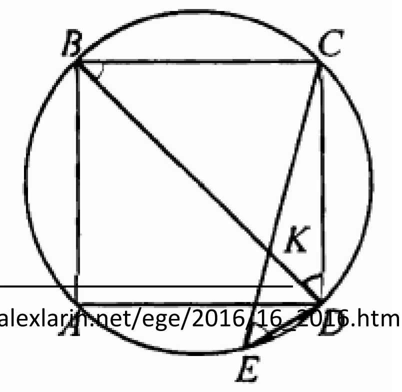
Из подобия $\Delta MBK \sim \Delta O_1AO_2 \Rightarrow \frac{BW}{AH} = \frac{MK}{O_1O_2} = \frac{7}{5} \Rightarrow$ $BW = \frac{7 \cdot 2{,}4}{5} = 3{,}36.$

Ответ: 3,36.

Задача 11 (Пример задания 16 ЕГЭ 2016 профиль)[4]. Квадрат ABCD вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K.

а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$;

б) Найдите отношение CK и KE, если угол KCD равен 15^0.



Решение. а) Рассмотрим ΔECD и ΔCKD.

$\angle C$ – общий

[4] http://alexlarin.net/ege/2016/16_2016.html

$\angle$CED=$\frac{1}{2}\smile CD=\frac{1}{2}90^0=45^0$(так как хорды AB=BC=CD=AD$\Rightarrow$ $\smile$AB=$\smile$BC=$\smile$CD=$\smile$AD=$\frac{360^0}{4}=90^0$.

$\angle$KDC=45^0 (угол между стороной и диагональю квадрата).

Значит, $\Delta ECD\ \sim\ \Delta DCK$.

б) $\frac{EC}{DC}=\frac{CD}{CK}\Rightarrow EC\cdot CK=CD\cdot AB$.

Рассмотрим ΔDCK.

$\angle\,CKD=180^0-\angle KCD-\angle CDK=180^0-45^0-15^0=120^0$.

По теореме синусов

$$\frac{DC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{CK}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow CK=\sqrt{\frac{2}{3}}CD.$$

Тогда

$$EC\cdot CK=CD\cdot AB\Rightarrow$$

$$\Rightarrow EC\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}CD=CD\cdot AB\Rightarrow$$

$$\Rightarrow EC\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=AB\Rightarrow EC=\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{C}D.$$

KC=EC-CK=$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)CD=\frac{CD}{\sqrt{6}}$.

$$\frac{KC}{KE}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}DC}{\sqrt{3}CD}=\frac{2}{1}.$$

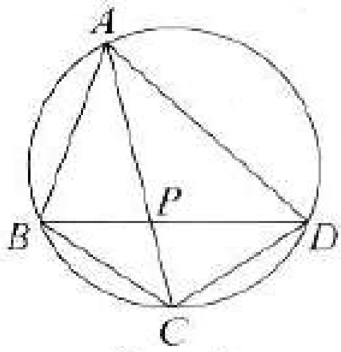
Ответ: 2:1.

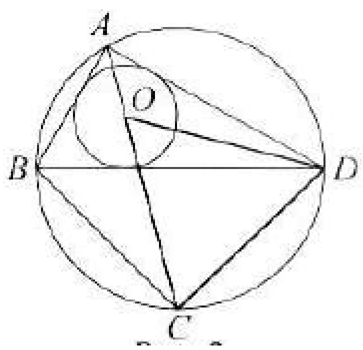
Задача 12 (Пример задания 18 ЕГЭ 2015 профиль)[5].

Диагонали AC и BD четырехугольника ABCD, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причем BC=CD

а) Докажите, что $AB{:}\,BC=AP{:}\,PD$;

б) Найдите площадь ΔCOD, где O – центр окружности, вписанной в ΔABD, если дополнительно известно, что BD – диаметр описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности, AB=6, а BC=6√2.





Решение. а)

$$\left.\begin{aligned}&\text{Хорды } BC=CD \Rightarrow\ \smile BC=\smile CD\\ &\angle BAC=\frac{1}{2}\smile BC\\ &\angle DAC=\frac{1}{2}\smile CD\end{aligned}\right| \Rightarrow \angle BAC=\angle DAC.$$

---

[5] http://alexlarin.net/ege/2015/18_2015.html

$$\angle ACB = \angle ADB = \frac{1}{2} \smile AB.$$

По первому признаку подобия $\Delta ADP = \Delta ACB \Rightarrow$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{DP}{CB} \Rightarrow \frac{AP}{DP} = \frac{AB}{CB}.$$

б) ∠BAC=∠CAD⇒AC - биссектриса ∠BAD.

O – центр окружности, вписанной в ΔABD. Центр вписанной окружности находится на пересечении биссектрис. Значит, O∈ AP.

BD – диаметр окружности описанной вокруг четырехугольника ABCD, ∠DAB= 90^0.

Рассмотрим $\Delta ABC.$ По теореме синусов

$\frac{AB}{\sin(\angle C)} = \frac{BC}{\sin(\angle A)} \Rightarrow \sin(\angle C) = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle C = 30^0 \Rightarrow$
$\smile AB = 60^0 \Rightarrow \angle ADB = 30^0.$

O – центр окружности, вписанной в $\Delta ABD \Rightarrow$ DO – биссектриса ⇒∠ODP=15^0.

$$\angle ODC = \angle ODP + \angle PDC = 15^0 + 45^0 = 60^0.$$

$\angle DCP = \frac{1}{2} \smile AD = \frac{1}{2}(360^0 - 90^0 - 90^0 - 60^0) =$
$60^0.$

$\Delta DOC -$ равносторонний.

$$S_{\Delta DOC} = \frac{1}{2} 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}.$$

Ответ: $18\sqrt{3}$.

Список литературы

1.Гордин Р.К. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С4. Геометрия. Планиметрия/ Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. -4-е. изд., испр.- М.: МНМО, 2013 – 176 с.

2. http://alexlarin.net

3. http://www.mathgia.ru