Учебное пособие по планиметрии

§1. Теорема косинусов и синусов.

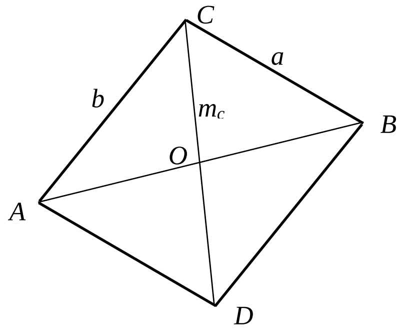
Теорема 1°

В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон.

Выражая квадрат каждой диагонали параллелограмма через его стороны и углы по теореме косинусов, а затем, складывая оба равенства, получаем формулу $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$, где d_1 и d_2 — диагонали, a и b — стороны параллелограмма.

2.1.3. Задача 1°.

Зная три стороны треугольника a, b и c, найти медиану m_c к стороне c.



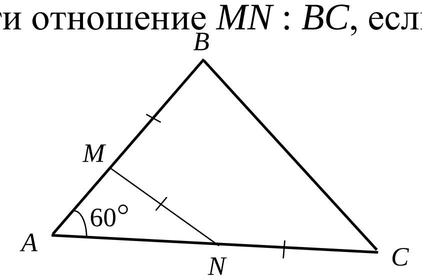
Достроим ΔABC до параллелограмма, тогда диагональ $CD = 2m_c$, а диагональ $AB = C$. По теореме 1° $4m_c^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2$. Тогда

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \text{ или}$$

$$m_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

Задача 2°.

В ΔABC точки M и N лежат на сторонах AB и AC, при этом $BM = MN = NC$. Найти отношение $MN : BC$, если $AC : AB = 3 : 2$, и угол A равен 60°.



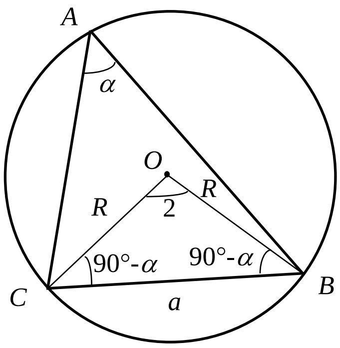
Здесь важно не само решение задачи, а его поиск. Проанализируем решение этой задачи.

Анализ задачи.

Нужно найти $MN : BC$. Оба отрезка являются сторонами треугольников AMN и ABC и лежат напротив угла A. Это наводит на мысль о теореме косинусов. Но чтобы применить теорему косинусов, надо знать стороны, прилежащие к углу A. AC и AB неизвестны, но известно их отношение 3 : 2, тогда, введя коэффициент пропорциональности, обозначим $AC = 3k$, $AB = 2k$. Таким образом, BC можно выразить через k. Для нахождения MN нужно знать AM и AN. $AM = AB - MN = 2k - MB$ и $AN = AC - NC = 3k - NC$. Учитывая, что $MB = NC$, можно ввести обозначение $x = MB = NC = MN$. Тогда $AM = 2k - x$, а $AN = 3k - x$. Так как $MN = x$, то можно опять выразить MN через k. Легко догадаться, что когда мы разделим MN на BC, то k сократится.

Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

Используя теорему синусов, докажем, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу описанной окружности.



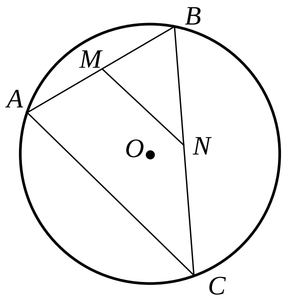
Решение приводится для случая остроугольного треугольника. Случай для тупоугольного треугольника оставляется на самостоятельную проработку.

Из ΔCOB $\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\sin(90^\circ - \alpha)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

<u>Задача 4°.</u>

Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 см и 17 см. Отрезок, соединяющий середины этих хорд, равен 5 см. Найти радиус окружности.



MN — средняя линия ΔABC. Так как $MN = 5$ см, то $AC = 10$ см. Радиус окружности равен отношению любой стороны треугольника к удвоенному синусу противолежащего угла. Все стороны треугольника известны, а угол можно найти по теореме косинусов:

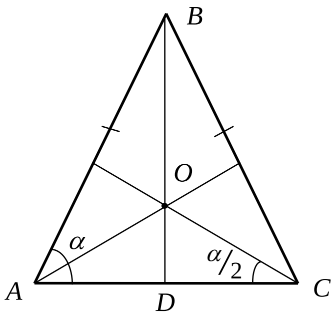
$$\cos\angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\cdot AB\cdot BC} = \frac{9^2 + 17^2 - 10^2}{2\cdot 9\cdot 17} = \frac{15}{17}$$

$$\sin\angle B = \frac{8}{17} \quad R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{10\cdot 17}{2\cdot 8} = \frac{85}{8}\text{(см)}.$$

Ответ: $R = \frac{85}{8}$ см.

1) Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найти площадь описанного около треугольника круга, если радиус вписанной в треугольник окружности равен r.

Решение.



Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис.

ΔAOD: AD = $r \cdot ctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow AC = 2r \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$

$\angle ABC$ = 180 - 2α sin$\angle ABC$ = sin2α

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2r \cdot ctg\frac{\alpha}{2}}{2\sin 2\alpha} = \frac{r \cdot ctg\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha};$$

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi R^2 ctg^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2 2\alpha}$$

Ответ: $\frac{\pi R^2 ctg^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2 2\alpha}$.

Задание на дом.

1) 3°. В равнобедренном ΔABC длины боковых сторон *AB* и *AC* равны *b*, угол при вершине *A* равен 30°. Прямая, проходящая через вершину *B* и центр *O* описанной окружности, пересекает сторону *AC* в точке *D*. Найти длину отрезка *BD*.

2) В треугольнике *ABC* угол *A* в два раза больше угла *B*, противолежащие этим углам стороны равны *a* и *b*. Найти радиус описанной окружности.

3) Повторить все формулы на вычисление площади треугольников и круга.

§ 2. Площади треугольников.

Необходимые теоретические сведения.

1] Формулы площадей треугольников.

а) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, где *a, b, c* — стороны треугольника, *h* — высота;

б) $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\angle(ab) = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\angle(ac) = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle(bc)$;

в) $S = pr$ } $p = \frac{a+b+c}{2}$,

г) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ r — радиус вписанной окружности

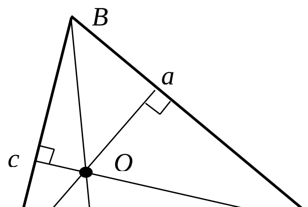
д) $S = \frac{abc}{4R}$

2] Вывод некоторых формул.

д) $S_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\angle C$, но по теореме синусов $\sin\angle C = \frac{C}{2R}$. После подстановки получаем: $S_\Delta = \frac{abc}{4R}$.

в)

Если соединить центр О вписанной



окружности с вершинами треугольника, образуются три треугольника BOC, AOC и AOB. Площади этих треугольников равны соответственно $\frac{1}{2}ar$; $\frac{1}{2}br$; $\frac{1}{2}cr$, а площадь ΔABC равна их сумме.

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr$$

г) Площадь треугольника через его стороны выражается по формуле Герона. Выведем ее.

Из теоремы косинусов следует, что $\cos\angle C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Тогда

$$\sin^2\angle C = 1-\cos^2\angle C = (1+\cos\angle C)(1-\cos\angle C) =$$

$$= \left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) = \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2}(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)$$

Так как $a + b + c = 2p$, то

$$\sin^2\angle C = \frac{1}{4a^2b^2}\cdot 2p\cdot(2p-2c)(2p-2a)(2p-2b) =$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2}\cdot 16p\cdot(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{4}{a^2b^2}\cdot p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\sin\angle C = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

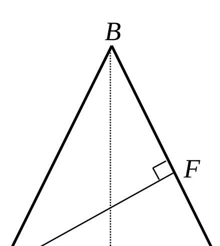
$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\angle C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

3). Некоторые факты, помогающие решать задачи.

1) Медиана, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.
2) Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.
3) Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон.
Первый факт легко проиллюстрировать, показав, что середина гипотенузы является центром описанной окружности.
Доказательство 2) и 3) можно отыскать в учебнике.

2.4.3. Задача.

Найти площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 8, а высота к боковой стороне равна 4,8.



$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$$

$ah_a = bh_b$ $a = 8,\ h_b = 4{,}8$

$8 \cdot h_a = b \cdot 4{,}8$

$h_a = \frac{3}{5}b \quad DC = \frac{a}{2} = 4$

$$\Delta ABD\text{: } b^2 = h_a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9}{25}b^2 + 16$$

$$\frac{16}{25}b^2 = 16$$

$$\begin{cases} b^2 = 25 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 5$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 4{,}8\cdot 5 = 12$$

Ответ: 12.

4) . Задание на дом.

Задача 5°. В прямоугольном треугольнике с катетами 6 см и 8 см из вершины прямого угла проведены медиана и высота. Найти площадь треугольника между медианой и высотой.

Задача 6°. Найти площадь треугольника, две стороны которого равны 3 см и 7 см, а медиана к третьей стороне равна 4 см.

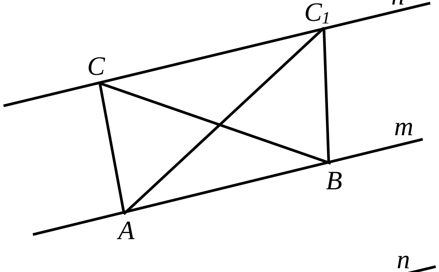
3) Решить задачу.

В ΔABC медиана AM перпендикулярна медиане BK. Найти площадь ΔABC, если $AM = 6$ см, $BK = 5$ см (ответ: 20 см^2. Указание. Применить свойство медиан треугольника.)

§3 Решение задач.

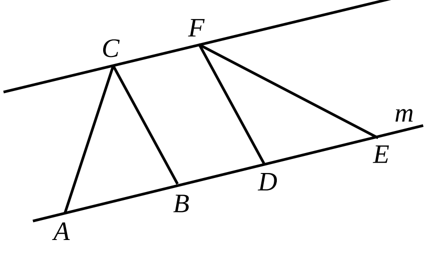
1. Задача по рисунку.

1)



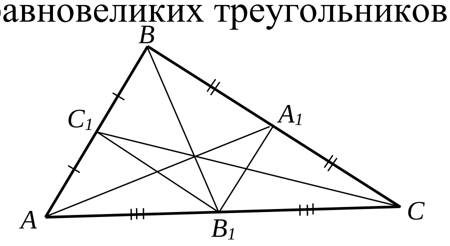
Докажите, что если $m \parallel n$, то ΔABC и ΔABC_1 равновелики.

2)



$m \parallel n$. Какое условие необходимо и достаточно для того, чтобы ΔABC и ΔDEF были равновелики.

3) Докажите, что медианы треугольника образуют шесть равновеликих треугольников.



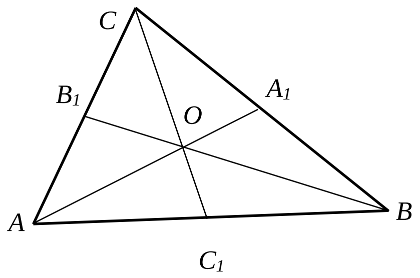
$$\left.\begin{aligned} S_{\Delta ABB_1} &= S_{\Delta CBB_1} \\ S_{\Delta AA_1B} &= S_{\Delta AA_1C} \\ S_{\Delta C_1CB} &= S_{\Delta C_1CA} \end{aligned}\right\}$$ т.к. у этих пар треугольников общие высоты и равны стороны, на которые эти высоты опускаются.

Докажем, что $S_{\Delta AA_1B} = S_{\Delta ABB_1}$. $A_1B_1 \parallel AB$ (т.к. A_1B_1 — средняя линия ΔABC). Тогда ΔAA_1B и ΔABB_1 равновелики, так как у них сторона AB общая и лежит на одной из двух параллельных прямых, а вершины A_1 и B_1 лежат на другой. Аналогично можно доказать, что ΔCBB_1 равновелик с ΔCC_1B (средняя линия C_1B_1). Следовательно, в силу транзитивности равенства все шесть треугольников равновелики. □

2. Результат предыдущей задачи можно использовать как самостоятельную теорему. Имеет смысл рассмотреть следствие из этой теоремы.

Следствие.

Три медианы треугольника, пересекаясь, образуют шесть равновеликих треугольников с вершиной в точке их пересечения.



То есть ΔAOC_1, AOB_1, B_1OC, COA_1, A_1OB, BOC_1 — равновелики. Три пары равновеликих треугольников легко увидеть. Это ΔAOC_1 и ΔBOC_1, ΔAOB_1 и ΔB_1OC, ΔCOA_1 и ΔA_1OB. Докажем равенство площадей треугольников из разных пар. Рассмотрим ΔAOC_1 и ΔCOA_1. Равенство их площадей можно показать, по крайней мере, двумя способами:

I способ.

$$\left.\begin{aligned} S_{\Delta CC_1B} &= S_{\Delta COA_1} + S_{A_1OC_1B} \\ S_{\Delta AA_1B} &= S_{\Delta AOC_1} + S_{A_1OC_1B} \end{aligned}\right| S_{\Delta CC_1B} = S_{\Delta AA_1B}$$

Вычтя почленно второе равенство из первого, получим

$$S_{\Delta COA_1} - S_{\Delta AOC_1} = 0 \Leftrightarrow S_{\Delta COA_1} = S_{\Delta AOC_1}.$$

II способ.

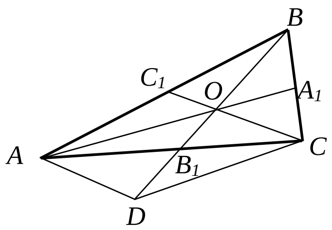
Обозначим $AO = 2k \Rightarrow A_1O = k$; $CO = 2x \Rightarrow C_1O = x$; $\angle AOC_1 = \angle COA_1 = \alpha$.

$$\left.\begin{aligned} S_{\Delta AOC_1} &= \frac{1}{2}\cdot 2k\cdot x\cdot \sin\alpha = kx\sin\alpha \\ S_{\Delta COA_1} &= \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot k\cdot \sin\alpha = kx\sin\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{\Delta AOC_1} = S_{\Delta COA_1}$$

Аналогично доказывается равенство площадей других треугольников.

3. Задача 7°.

Найти площадь треугольника, если его медианы равны 3 см, 4 см и 5 см.



$CC_1 = m_c = 3$ см
$BB_1 = m_b = 4$ см
$AA_1 = m_a = 5$ см

$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$. Однако найти $S_{\Delta AOC}$ сразу мы не можем, так как нам неизвестна сторона AC. Попробуем построить треугольник, равновеликий треугольнику AOC, но площадь, которого найти легче. Достроим ΔAOC до параллелограмма, продолжив его медиану OB_1 за сторону AC. Легко видеть, что $S_{\Delta DOC} = S_{\Delta AOC}$, так как у них общая сторона OC, а вершины лежат на прямой AD, которая параллельна OC.

В ΔDOC: $DO = DB_1 + OB_1 \overset{DB_1 = OB_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \frac{8}{3}$ (см).

$$CO = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \text{ (см) и } DC = AO = \frac{10}{3} \text{ (см)}$$

По формуле Герона находим:

$$S_{\Delta DOC} = \sqrt{4 \cdot (4-2) \cdot \left(4 - \frac{8}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{10}{3}\right)} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{8}{3} \left(\text{см}^2\right)$$

$$S_{\Delta ABC} = 3 \cdot S_{\Delta AOC} = 3 \cdot S_{\Delta DOC} = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8 \left(\text{см}^2\right)$$

Ответ: 8 см^2.

4. Задание на дом.

1)Задача 8°.

Найти отношение площади S треугольника к площади S_0 треугольника, составленного из медиан первого.

2)Решить задачу 7°, используя результат задачи 8°.

3) Доказать, что отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны.

4) Задача 9°.

Около окружности радиуса 5 см описан треугольник. Найти его площадь, если одна из сторон точкой касания делится на отрезки 12 см и 7,5 см.

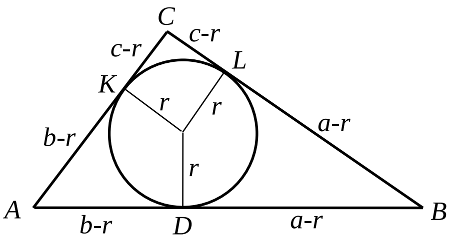
5)Задача 10°.

В ΔABC угол C равен φ, $AC = b$, $BC = a$. Доказать, что биссектриса угла C равна

$$\frac{2ab}{a+b} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

§4. Решение задач.

. 1) Выразить радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности через его стороны.



$KC = CL = r$.

Обозначим $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Тогда $BL = a - r$, $AK = b - r$.

По свойству касательных $AD = AK = b - r$ и $BD = DL = a - r$, но $AB = AD + DB = c$, значит,

$a - r + b - r = c \Rightarrow 2r = a + b - c$, или

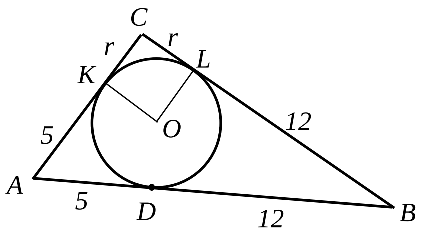
$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Итак, для прямоугольного треугольника

$$\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}$$

2) <u>Задача.</u>

В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 см и 12 см. Найдите катеты треугольника.



Площадь ΔABC можно выразить двумя способами: через радиус вписанной окружности и через катеты.

$$S = pr = \frac{5+r+12+r+17}{2} \cdot r = (17+r) \cdot r$$

$$S = \frac{1}{2}(5+r)(12+r)$$

Составим уравнение.

$$(5+r)(12+r) = 2(17+r) \cdot r$$

$r = 3$ (см); $AC = 8$ (см); $CB = 15$ (см).

Ответ: 8 см и 15 см.

3) <u>Теорема Пифагора</u>.

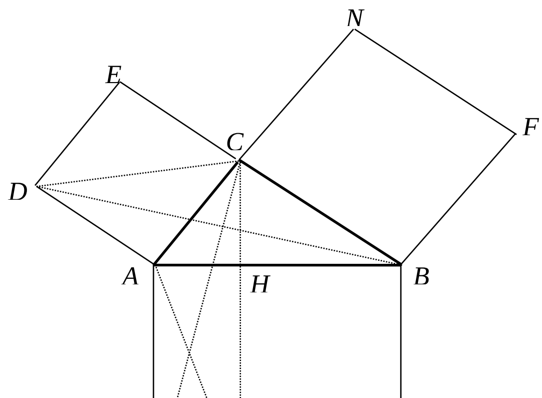
Площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника.

Пусть ΔABC — прямоугольный, а $ACED$, $CNFB$ и $ABML$ — квадраты, построенные на катетах и гипотенузе.

$AD \parallel CD \Rightarrow S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ADB}$.

(Сторона AD — общая, а вершины C и B лежат на прямой, параллельной AD). Проведем $CK \parallel AL$, тогда $S_{\Delta AKL} = = S_{\Delta ACL}$ (AL — общая, а C и $K \in CK \parallel AL$).

Можно увидеть, что если сделать поворот на 90° около точки A, то точка



C перейдет в точку D, а точка L — в точку B, то есть $\Delta ACL \to \Delta ADB$, но поворот — движение, а движение не меняет площадь,

значит, $S_{\Delta AKL} = S_{\Delta CAL} = S_{\Delta ADB} = S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} S_{ADEC}$,

но $S_{\Delta AKL} = \frac{1}{2} S_{AHKL} \Rightarrow S_{ADEC} = S_{AHKL}$.

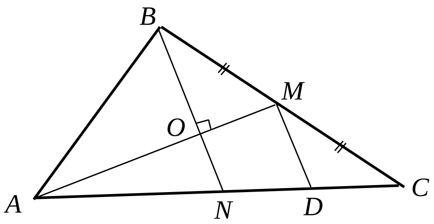
Аналогично доказывается, что $S_{CNFB} = S_{HKMB}$, а значит,

$$S_{ABML} = S_{ADEC} + S_{CNFB}$$

4) В ΔABM сторона $AB = a$, а в треугольнике CDM сторона $CD = b$. Найти отношение площадей этих треугольников, если AB и CD лежат на одной прямой.

Ответ: $\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta CDM}} = \frac{a}{b}$.

5) В ΔABC точка N лежит на стороне AC, $AN = \frac{2}{5} AC$, медиана AM перпендикулярна BN. Найти площадь ΔABC, если $AM = m$ и $BN = n$.



Решение.

Решение этой задачи опирается на результат предыдущей. Кроме того, полезно использовать теорему о пропорциональных отрезках:

Параллельные прямые отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

Если мы найдем $S_{\Delta ABN}$, то легко вычислить $S_{\Delta ABC}$, т.к. $S_{\Delta ABC} = \frac{5}{2} S_{\Delta ABN}$ (у этих треугольников общая вершина, а стороны AC и AN, лежащие на одной прямой, относятся как 5:2). Для того, чтобы найти $S_{\Delta ABN}$, надо знать AO. Найдем, какую часть от AM составляет AO. Для этого проведем $MD \parallel BN$, тогда $\frac{AO}{OM} = \frac{AN}{ND}$. Но из ΔBNC видно, что $\frac{ND}{DC} = \frac{BM}{MC} = 1:1 \Leftrightarrow ND = DC$.

Следовательно,

$$ND = \frac{1}{2} NC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{2} AN = \frac{3}{4} AN \Rightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AO}{OM} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{AM} = \frac{4}{7} \Rightarrow AO = \frac{4}{7} AM = \frac{4}{7} m \Rightarrow S_{\Delta ABN} = \frac{1}{2} AO \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot m \cdot n = \frac{2}{7} \cdot m \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{5}{2} S_{\Delta ABN} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot m \cdot n = \frac{5}{7} mn.$$

Ответ: $\frac{5}{7} mn$.

6) Домашнее задание.

Подготовка к зачету.

Вопросы к зачету.

1] Задачи 1° - 10°, разобранные в тексте пособия.

2] 2.1. Доказать, что в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

2.2. Доказать, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно $2R$.

2.3. Вывести формулы площади треугольника через радиусы вписанной и описанной окружности.

2.4. Вывести формулу Герона.

2.5. Докажите, что медианы образуют в треугольнике шесть равновеликих треугольников.

2.6. Докажите, что три медианы, пересекаясь, разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников с вершиной в точке пересечения медиан.

§5. Площадь четырехугольника.

1.Теорема 2°.

Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

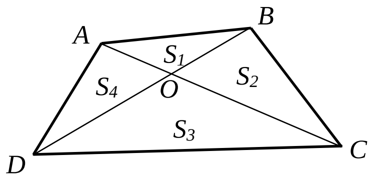
Следствие.

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей.

2. Задача.

1) Найти площадь четырехугольника, образованного отрезками, соединяющими последовательно середины сторон выпуклого плоского четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны 6 см и 8 см.

2) Пусть диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника, площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что $S_1 \cdot S_3$, = $= S_2 \cdot S_4$.



Решение.

ΔAOD и ΔBOA имеют общую вершину A, а основания лежат на одной прямой. Значит,

$$\frac{S_4}{S_1} = \frac{DO}{OB}.$$

Аналогично рассуждая, получим, что $\frac{S_3}{S_2} = \frac{DO}{OB}$. Значит,

$$\frac{S_4}{S_1} = \frac{S_3}{S_2} \Rightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4.$$

3. Задание на дом.

11°. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны a и b ($a \neq b$), а угол между диагоналями равен α.

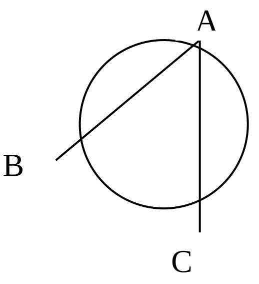
12°. В окружность радиуса 13 см через точку A, лежащую на диаметре MP, под углом 30° проведена хорда QN. Найти площадь четырехугольника $MNPQ$, если MA = 3 см.

13°. Найти площадь трапеции, если ее основания равны 16 см и 44 см, а боковые стороны равны 17 см и 25 см.

14°. Отрезок длины m, параллельный основаниям трапеции, разбивает ее на две трапеции. Найти отношение площадей этих трапеций, если основания трапеций равны a и b ($a < b$).

§6.Углы, вписанные в окружность.

1. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называют вписанным в окружность.



Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Так $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC$ (под градусной мерой дуги следует понимать градусную меру соответствующего центрального угла). Из этого вытекает ряд следствий:

- на равные дуги опираются равные вписанные углы;
- угловые величины дуг заключенных между параллельными хордами равны;
- величины углов, опирающихся на одну хорду, могут быть равны, а могут составлять в сумме 180º.
- хорды, стягивающие равные дуги равны.

2. Ключевые задачи:

2.1. Из точки А, лежащей вне окружности, выходят лучи АВ и АС, пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла ВАС равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

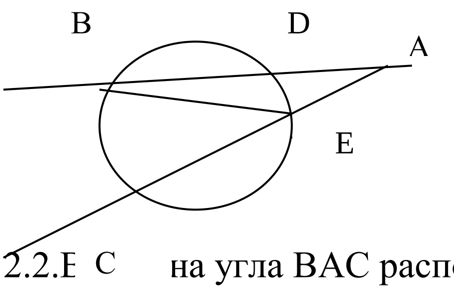
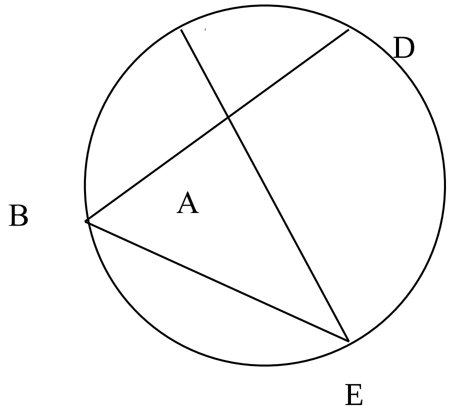


Рисунок является подсказкой к решению задачи.

2.2.Е на угла ВАС расположена внутри окружности. Докажите, что велич гла ВАС равна полусумме угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла ВАС и внутри угла, симметричного ему относительно вершины А.

C



Рисунок—подсказка.

2.3. Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC. Докажите, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

2.4.Докажите, что все углы, образованные сторонами и диагоналями правильного n-угольника, кратны $180/n$.

2.5.Центр вписанной окружности треугольника ABC симметричен центру описанной окружности относительно стороны AB. Найдите углы треугольника ABC.

2.6.Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что AD=BD.

3. Задачи, рекомендуемые для самостоятельного решения.

3.1.Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

3.2.Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую в точках B и D. Докажите, что AC$\parallel$BD.

3.3.На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке; A_1, B_1, C_1, D_1- середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

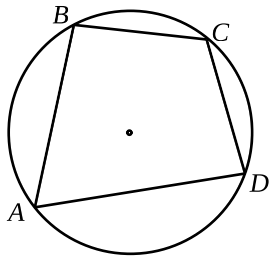
§ 7. Свойства вписанных и описанных четырехугольников.

1) Четырехугольник вписан в окружность, если все его вершины лежат на окружности.

2) <u>Теорема</u>.

Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противолежащих углов равна 180°.

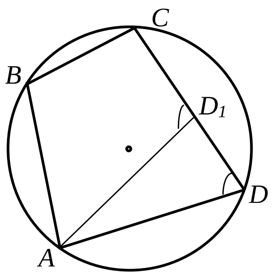
Доказательство.



Необходимость.
$ABCD$ — вписан в окружность.

$$\angle B+\angle D=\frac{1}{2}\overset{\smile}{ADC}+\frac{1}{2}\overset{\smile}{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 360^\circ=180^\circ$$

Аналогично доказывается для углов A и C.



Достаточность.

Пусть $\angle B$ + $\angle D$ = 180°. Проведем окружность около ΔABC. Предположим, D лежит внутри окружности. Продолжим CD до пересечения с окружностью, получим точку D_1. $ABCD_1$ вписан в окружность, значит, $\angle B$ + $\angle D_1$ = 180°, но тогда $\angle D = \angle D_1$, что невозможно, т.к. $\angle D$ — внешний угол ΔADD_1. Аналогичная ситуация возникает, если точка D лежит вне окружности. Следовательно, D может лежать только на окружности, а это означает, что $ABCD$ вписан в окружность.

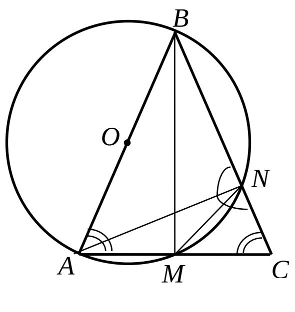
3) Следствия.

а) Из всех параллелограммов только около прямоугольника можно описать окружность.

б) Из всех трапеций только около равнобокой трапеции можно описать окружность.

4) Задача.

В равнобедренном ΔABC ($AB = BC$) на боковой стороне AB, как на диаметре, построена окружность, которая пересекает стороны AC и BC в точках M и N. Найти длину боковой стороны, если BN = 7 см, а MC = 3 см.



Решение.

Во-первых, легко увидеть, что $\angle AMB$ вписан в окружность и опирается на диаметр, следовательно, $BM \perp AC$. Учитывая, что ΔABC — равнобедренный, заключаем, что $AM = MC$, а значит AC = = 2 · MC = 6 см.

Во-вторых, четырехугольник AMNB вписан в окружность, а значит $\angle BAC + \angle MNB$ = 180°, но

$\angle MNC + \angle MNB$ = 180° (как смежные). Следовательно, $\angle BAC = \angle MNC$, а так как $\angle BAC = \angle BCM$, из чего следует, что ΔMNC — равнобедренный (MC = MN = 3). ΔMNC подобен ΔBAC (по двум углам), а значит $\frac{NC}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

Обозначим $NC = x$, тогда $BC = 7 + x$. Подставим обозначения в пропорцию:

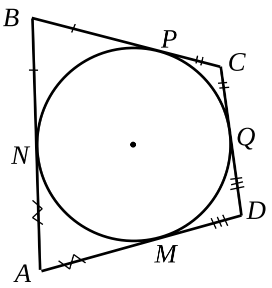
$\frac{x}{6}=\frac{3}{7+x}$. $x^2 + 7x - 18 = 0$. Решая это уравнение, получаем, что $NC = 2$ см, а следовательно, $BC = AB = 9$ см.
Ответ: 9 см.

5) Четырехугольник описан около окружности, если все его стороны касаются окружности.

Теорема.

Выпуклый четырехугольник можно описать около окружности тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны.

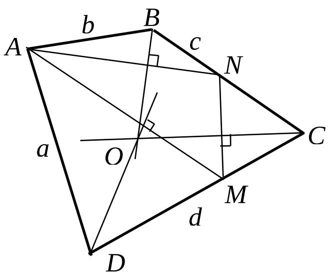
Доказательство.



Необходимость.

Пусть $ABCD$ описан около окружности. N, P, Q, M — точки касания сторон четырехугольника и окружности. Тогда $BN = BP$, $PC = CQ$, $QD = DM$, $AM = AN$.

$$BA + CD = (BN + NA) + (CQ + QD) =$$
$$= (BP + AM) + (PC + DM) = (BP + CP) + (AM + DM) =$$
$$= BC + AD.$$ Итак, $BA + CD = BC + AD$.



Достаточность.

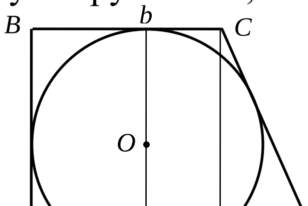
Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB + CD = BC + AD$. Докажем, что существует единственная точка, равноудаленная от всех его сторон. Обозначим $AD = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$. Тогда $b + d = a + c$, что равносильно $d - a = c - b$. Пусть $d > a$. Тогда $c > b$. Отложим на стороне DC меньшую сторону $DM = a$, а на стороне BC — $BN = b$. Получилось три равнобедренных треугольника: ABN, ADM и MCN. Это означает, что биссектрисы углов B, C и D являются серединными перпендикулярами сторон ΔANM и они пересекаются в одной точке. Обозначим эту точку O. Так как эта точка лежит на биссектрисах углов, то она равноудалена от сторон углов. То есть $\rho(O,AB) = \rho(O,BC) = \rho(O,CD) = \rho(O,AD)$. Следовательно, O равноудалена от сторон четырехугольника.
Если $d = a$, то $c = b$. Тогда биссектрисы углов B и D совпадают, и четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно BD. Пусть биссектриса угла C пересекает BD в точке O, тогда в силу симметрии AO — биссектриса угла A. Итак, точка O — центр вписанной в четырехугольник окружности.

6) Следствие.

Из всех параллелограммов только в ромб можно вписать окружность.

7) Задача.

Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найти радиус окружности, если длины оснований трапеции равны a и b.



Решение.

Пусть r — радиус вписанной окружности. Тогда $AB = 2r$. Так как в трапецию вписана окружность, то
$AB + CD = AD + CB$.

Пусть $AD = a$, $BC = b$, тогда $CD = a + b - 2r$. Проведем $CK \perp AD$, $CK = 2r$, $KD = a - b$. По теореме Пифагора

$$(a+b-2r)^2 = (2r)^2 + (a-b)$$

$$4r^2 = (a+\cancel{b}-2r+a-\cancel{b})(\cancel{a}+b-2r-\cancel{a}+b)$$

$$4r^2 = (2a-2r)(2b-2r)$$

$$r^2 = ab - ar - br + r^2$$

$$ab = r(a+b)$$

$$r = \frac{ab}{a+b}$$

Ответ: $r = \dfrac{ab}{a+b}$.

8) Задание на дом.

1] Теоретический материал.

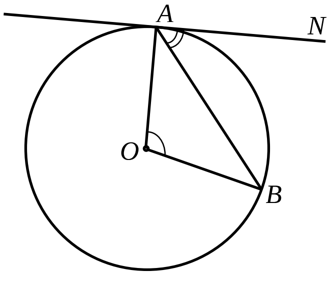
2] Решить задачу.

Трапеция описана около окружности. Найти отношение длины средней линии трапеции к ее периметру.

3]На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. M- середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что KECD- вписанный четырехугольник.

§8. Решение задач.

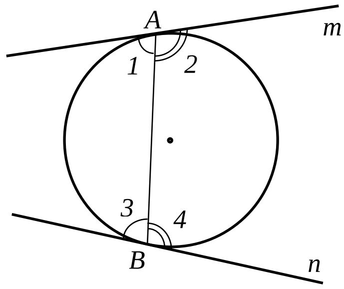
1] Доказать, что градусная мера угла, образованного хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги, заключенной между его сторонами.



Решение.

Обозначим искомый угол $\angle NAB = \alpha$, тогда
$\angle BAO = \angle OBA = 90° - \alpha$, а $\angle AOB = 180° - 2\cdot(90° - \alpha) = 2\alpha$, т.е. $\angle\alpha = \frac{1}{2}\angle AOB$.

2] Доказать, что хорда, имеющая общие точки с двумя касательными на окружности, образует с ними углы, синусы которых равны.



<u>Решение.</u>

$\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$, так как углы из каждой пары заключают между своими сторонами одну и ту же дугу. С другой стороны,

$$\sin\angle 1 = \sin(180° - \angle 4) = \sin\angle 3$$
$$\sin\angle 2 = \sin(180° - \angle 3) = \sin\angle 4$$

Итак: $\sin\angle 1 = \sin\angle 2 = \sin\angle 3 = \sin\angle 4$.

3] Докажите, что в описанном четырехугольнике отрезки, соединяющие точки касания сторон четырехугольника с окружностью, и диагонали четырехугольника пересекаются в одной точке.

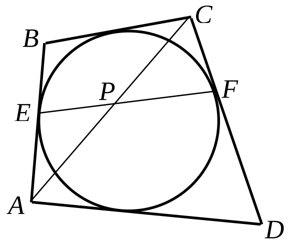


Рис.1.

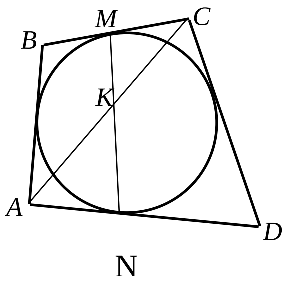


Рис.2.

<u>Доказательство.</u>

Сведем задачу к доказательству того факта, что точки P и K на рис.1 и рис.2 совпадают. Для этого достаточно доказать, что отрезки FE и MN делят диагональ AC в одном и том же отношении.

Докажем, что $\frac{CP}{AP} = \frac{CK}{AK}$.

Рассмотрим ΔCPF и ΔAPE (рис.1). $\sin\angle AEP = \sin\angle PFC$ (см. задачу 2]) и $\sin\angle EPA = \sin\angle CPF$ (как синусы равных углов). По теореме синусов

$$\left.\begin{array}{l}\Delta CPF: \dfrac{CF}{\sin\angle CPF} = \dfrac{CP}{\sin\angle PFC} \Rightarrow \dfrac{CF}{CP} = \dfrac{\sin\angle CPF}{\sin\angle PFC} \\ \Delta APE: \dfrac{EA}{\sin\angle EPA} = \dfrac{AP}{\sin\angle AEP} \Rightarrow \dfrac{EA}{AP} = \dfrac{\sin\angle EPA}{\sin\angle AEP}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{CF}{CP} = \frac{EA}{AP} \Rightarrow \frac{CP}{AP} = \frac{CF}{EA}$$

Теперь рассмотрим ΔMKC и ΔNKA. В них $\sin\angle KMC = \sin\angle KNA$ и $\sin\angle AKN = \sin\angle CKM$.

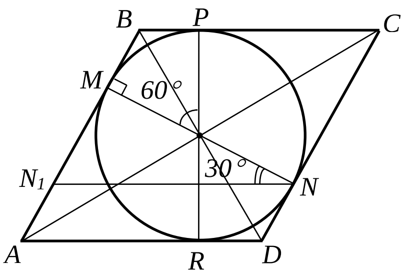
$$\left.\begin{array}{l}\Delta MKC: \dfrac{MC}{\sin\angle CKM} = \dfrac{CK}{\sin\angle KMC} \Rightarrow \dfrac{MC}{CK} = \dfrac{\sin\angle CKM}{\sin\angle KMC} \\ \Delta NKA: \dfrac{AN}{\sin\angle AKN} = \dfrac{AK}{\sin\angle KNA} \Rightarrow \dfrac{AN}{AK} = \dfrac{\sin\angle AKN}{\sin\angle KNA}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MC}{CK} = \frac{AN}{AK} \Rightarrow \frac{CK}{AK} = \frac{MC}{AN}$$

Далее можно заметить, что $MC = CF$ и $AN = EA$. Значит, $\frac{CK}{AK} = \frac{CP}{AP}$.

Аналогично доказывается для второй диагонали.

4] Диагонали четырехугольника пересекаются в центре вписанной в него окружности. Радиус окружности равен 5 см. Найдите площадь четырехугольника, если отрезки, соединяющие точки касания его сторон с окружностью, пересекаются под углом 60°.

Решение.



Т.к. диагонали пересекаются в центре вписанной окружности, то там же пересекаются отрезки, соединяющие точки касания сторон четырехугольника с окружностью, значит, эти отрезки перпендикулярны сторонам четырехугольника, а это означает, что четырехугольник — параллелограмм. Но из всех параллелограммов только в ромб можно вписать окружность.

Итак, $ABCD$ — ромб. PR и MN — диаметры. PRL — высота ромба, опущенная на сторону AD. Построим $NN_1 \parallel AD$. ΔN_1MN — прямоугольный.

$$N_1N = \frac{MN}{\cos 30^\circ} = \frac{2MN}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 10}{3} = \frac{20\cdot\sqrt{3}}{3} \text{ (см)}$$

$$S_{ABCD} = PR\cdot AD = 10\cdot\frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{200\sqrt{3}}{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

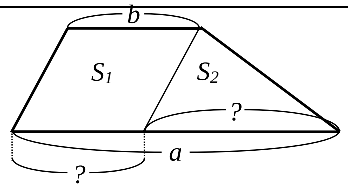
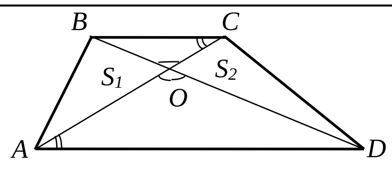
Ответ: $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ (см^2).

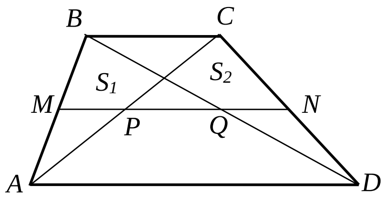
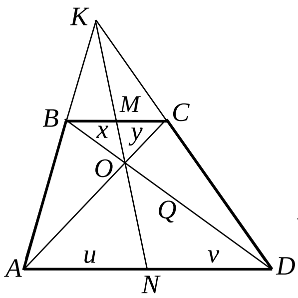
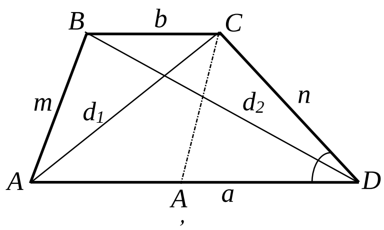
Задание на дом.

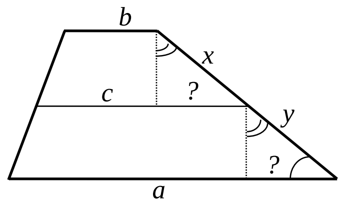
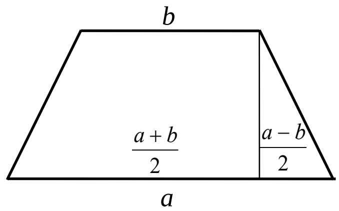
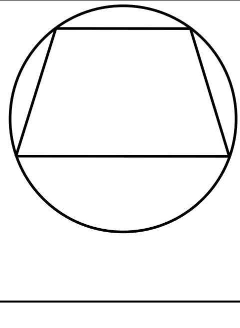
1) Решите задачу 4], если угол между отрезками, соединяющими точки касания равен α, а радиус окружности — r. Площадь какого ромба, описанного около данной окружности будет наименьшей? Ответ обосновать.
2) Докажите, что в трапеции боковые стороны видны из центра вписанной в нее окружности под прямым углом.

§9. Свойства трапеции.

Свойства трапеции оформлены в виде таблицы из двух столбцов. Слева формулировка свойства, а справа его доказательство. Некоторые доказательства в таблице пропущены (попробуйте выполнить доказательство самостоятельно), а некоторые только проиллюстрированы с помощью рисунка.

	Формулировка	Доказательство
①	Площадь трапеции вычисляется по формуле: $S = \frac{a+b}{2}\cdot h$	 $S_{тр} = S_1 + S_2$
②	Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника с общей вершиной. Треугольники, прилегающие к боковым сторонам,	

	равновелики, а треугольники, прилегающие к основаниям, подобны.	$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DBC}$ (почему?) $\Rightarrow S_1 = S_2$
③	Середины диагоналей трапеции и середины боковых сторон лежат на одной прямой. Причем средняя линия трапеции равна полусумме оснований, а отрезок, соединяющий середины диагоналей, — полуразности оснований.	
④	Точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжения боковых сторон, середины оснований трапеции лежат на одной прямой.	Пусть $K = AB \cap DC$ и O = $BD \cap AC$. $KO \cap BC$ = M $KO \cap AD$ = N Докажем, что M и N — середины DC и AD. Обозначим $BM = x$; $MC = y$; $AN = u$; $ND = v$. $\left.\begin{matrix}\Delta BKM \quad \Delta AKN \Rightarrow ? \\ \Delta MKC \quad \Delta NKD \Rightarrow ?\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x}{u} = \frac{y}{v}$ $\left.\begin{matrix}\Delta BMO \quad \Delta DNO \Rightarrow ? \\ \Delta CMO \quad \Delta ANO \Rightarrow ?\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x}{v} = \frac{y}{u}$ Итак: $\left.\begin{matrix}\frac{x}{u} = \frac{y}{v} \\ \frac{x}{v} = \frac{y}{u}\end{matrix}\right\} \overset{по÷ему?}{\Rightarrow} \frac{x^2}{uv} = \frac{y^2}{uv} \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y \overset{по÷ему?}{\Rightarrow} u = v$
⑤	Сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов его боковых сторон и удвоенного произведения оснований.	Доказать, что $d_1^2 + d_2^2 = m^2 + n^2 + 2ab$. Из ΔACD по теореме косинусов выражаем d_1^2, из ΔBDC — d_2^2. Складываем оба выражения и получаем выражение $d_1^2 + d_2^2$. Строим $CA' \parallel BA$. Чему равно $A'D$ и $A'C$? Из $\Delta A'CD$ по теореме косинусов выражаем m^2. Вычитаем почленно из выражения

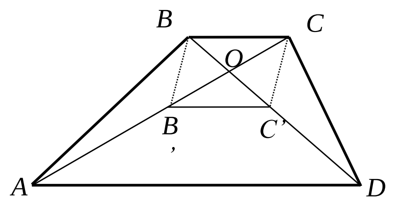
	$d_1^2 + d_2^2$ выражение m^2. После упрощения получаем искомую формулу.
⑥ Пусть отрезок c, параллельный основаниям трапеции, делит точкой пересечения одну из боковых сторон на отрезки x и y. Тогда, если основания трапеции равны a и b ($a > b$), то верно следующее соотношение: $\frac{x}{y} = \frac{c-b}{a-c}$.	 $\frac{x}{y} = \frac{c-b}{a-c}$
Свойства равнобокой трапеции	
⑦ В равнобокой трапеции диагонали и углы при основании равны.	
⑧ В равнобокой трапеции прямая, проходящая через середины оснований, перпендикулярна им и является осью симметрии трапеции.	
⑨ Квадрат диагонали равнобокой трапеции равен квадрату боковой стороны плюс произведение оснований.	
⑩ Перпендикуляр, опущенный из конца меньшего основания равнобокой трапеции на большее основание, делит его на отрезки, один из которых равен полусумме оснований, а второй — их полуразности.	
⑪ Трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.	

§10. Свойства трапеции (решение задач).

Решение задач.

1] В трапеции *ABCD* отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен меньшему основанию *BC*. Найти, в каком отношении точка пересечения диагоналей делит каждую из них?

Решение.



B'C' = *BC* и *B'C'* || *BC* (свойство 3).

Следовательно, *B'BCC'* — параллелограмм, значит, *O* — середина отрезков *B'C* и *C'B*, а так как *B'* и *C'* середины отрезков *AC* и *BC*, то *CO* и *BO* составляют 1/4 от *AC* и *BD*.

Итак, точка *O* делит диагонали трапеции в отношении 1:3.

Ответ: 1:3.

Другой вариант решения этой задачи.

Пусть *AD* = *a*, *BC* = *b*, тогда *B'C'* = $\frac{a-b}{2}$ (свойство 3). Так как *B'C'* = *BC*, то

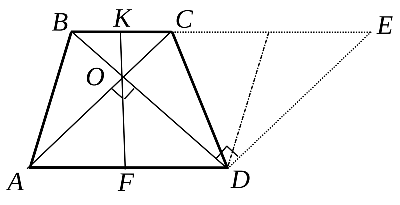
$\frac{a-b}{2} = b$, или *a* = 3*b*.

$\Delta BOC \sim \Delta DOA$ (свойство 2) $\Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{CO}{AO} = \frac{b}{a} = \frac{1}{3}$.

Ответ: 1:3.

2] Диагонали трапеции ABCD перпендикулярны, диагональ BD равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3,5. Найти другую диагональ.

Решение.



По свойству 4 *KF* проходит через точку пересечения диагоналей. Δ*BOC* и Δ*AOD* — прямоугольные, *KO* и *OF* являются медианами, опущенными на гипотенузы этих треугольников, следовательно,

$KO + OF = \frac{1}{2}(BC + AD)$, но

KO + *OF* = *KF* = 3,5. Значит, *BC* + *AD* = 7. Построим *DE* || *AC*. Δ*BED* — прямоугольный, причем *BD* = 5, *BE* = *BC* + *CE* = *BC* + *AD* = 7. По теореме Пифагора находим:

$AC = DE = \sqrt{49-25} = 2\sqrt{6}$

Ответ: $2\sqrt{6}$.

2'] В задаче 2] Δ*BDE* был получен в результате параллельного переноса диагонали AC на вектор $\vec{AD}$, обозначается $T_{\vec{AD}}\, AC \to DE$. Докажите, что площадь треугольника, полученного таким образом, в любой трапеции равна площади самой трапеции.

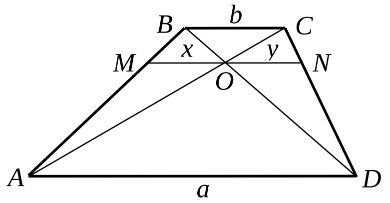
$S_{трапеции} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}$

$S_{\Delta BDE} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CDE}$

но ΔCDE и ΔABD имеют равные высоты, опущенные на равные стороны ($AD = CE$). Значит, они равновеликие.

$S_{\Delta BCD} = S_{\Delta CDE} \Rightarrow S_{трапеции} = S_{\Delta BDE}$

3] (еще одно свойство трапеции). В трапеции *ABCD* отрезок *MN* с концами на боковых сторонах *AB* и *CD* проходит через точку пересечения диагоналей и параллелен основаниям. Найти *MN*, если $AD = a$ и $BC = b$.



Обозначим MO = x, NO = y.

$$\Delta BOC \quad \Delta DOA \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{OD}{BO} = \frac{AO}{OC}$$

$$\Delta BMO \quad \Delta BAD \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{BD}{BO} = \frac{BO+OD}{BO} =$$

$$= 1 + \frac{OD}{BO} = 1 + \frac{a}{b} = \frac{b+a}{b}$$

$$\Delta CAD \quad \Delta CON \Rightarrow \frac{a}{y} = \frac{AC}{OC} = \frac{AO+OC}{OC} = \frac{AO}{OC} + 1 = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$$

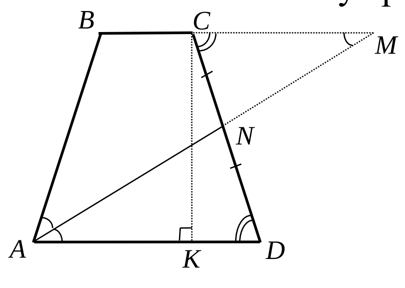
$$\text{Итак, } \frac{a}{x} = \frac{a}{y} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow x = y = \frac{ab}{a+b}$$

$$MN = x + y = \frac{2ab}{a+b}$$

Ответ: $\frac{2ab}{a+b}$.

В этой задаче в процессе решения мы вывели еще один важный факт. Точка *O* делит отрезок *MN* на <u>равные</u> части, каждая из которых равна $\frac{ab}{a+b}$.

4] В равнобокой трапеции *ABCD* меньшее основание *BC* равно 3, боковая сторона равна 26. Биссектриса угла *A* пересекает сторону *CD* в ее середине — точке *N*. Найти высоту трапеции.



1) $AN \cap BC = M$.

$\Delta CNM = \Delta DNA \Rightarrow CM = AD$

$\angle BAN = \angle CMN \Rightarrow \Delta ABM$ — равнобедренный.

$\Rightarrow AB = BM = 26 \Rightarrow AD = CM = 26 - 3 = 23$.

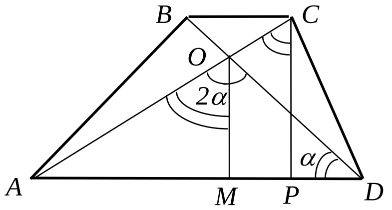
2) $CK \perp AD$. $KD = \frac{AB - BC}{2} = \frac{26-3}{2} = 10$ (св-во 10).

$$CK = \sqrt{CD^2 - KD^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{(26-10)(26+10)} = \sqrt{16 \cdot 36} = 24.$$

Ответ: 24.

5) Диагонали равнобокой трапеции *ABCD*, пересекаясь, делятся в отношении 3:5; угол между диагоналями трапеции, противолежащий большему основанию *AD*, в два раза больше острого угла трапеции. Найти основания, если высота трапеции равна *h*.

<u>Решение</u>.



$\Delta BOC \sim \ \Delta DOA \Rightarrow \dfrac{CO}{OA}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{3}{5}$; $BC=\dfrac{3}{5}AD$.

Обозначим $AD = a$, $BC = b$, тогда $b=\dfrac{3}{5}a$.

Пусть M — середина AD, тогда по свойству 8, $OM \perp AD$ и лежит на оси симметрии трапеции, значит $\angle AOM = \dfrac{1}{2}\angle AOD$

Пусть $CP \perp AD$, тогда $CP \parallel OM$ и следовательно $\angle AOM = \angle ACP$, тогда ΔACP ΔCDP.

Из подобия треугольников $\dfrac{CP}{PD}=\dfrac{AP}{CP}$, $CP = h$, по свойству 10 $PD=\dfrac{a-b}{2}$, а AP

$$=\frac{a+b}{2},\quad \frac{a-b}{2}=\frac{\frac{2}{5}a}{2}=\frac{1}{5}a;\ \frac{a+b}{2}=\frac{\frac{8}{5}a}{2}=\frac{4}{2}a.$$

Итак $\dfrac{h}{\frac{1}{5}a}=\dfrac{\frac{4}{5}a}{h}$, откуда $h=\dfrac{2}{5}a$ или $a=\dfrac{5}{2}h$, тогда $b=\dfrac{3}{2}h$.

Ответ: $\dfrac{5}{2}h$, $\dfrac{3}{2}h$.

2) Задание на дом.

1]Решите задачи.

15°. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 5 см, одна из диагоналей равна 6 см. Найти площадь трапеции, если ее диагонали перпендикулярны.

16°. Диагонали трапеции, пересекаясь, разбивают ее на четыре треугольника с общей вершиной. Найти площадь трапеции, если площади треугольников, прилежащих к основаниям, равны S_1 и S_2.

17°. Основания равнобокой трапеции равны 4 и 6, боковая сторона равна 5. Найти радиус окружности, описанной около этой трапеции.

18°. Около окружности описана равнобокая трапеция с острым углом 60°. Найти отношение длин оснований.

2]. Решите задачу.

В прямоугольную трапецию $ABCD$ ($AB \perp AD$) вписана окружность с центром O. Основание трапеции $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$). F — точка пересечения диагоналей трапеции. Найдите сумму площадей треугольников AFO и BFO.

§11 Вопросы к зачету.

1] Теоретические вопросы к зачету.

1. Формула площади четырехугольника по диагоналям и углу между ними (вывод).

2. Четырехугольник, вписанный в окружность (необходимое и достаточное условия). Следствия.

3. Четырехугольник, описанный около окружности (определение, необходимое и достаточное условия).

4. Угол между хордой и касательной.

5 -15. Свойства трапеции.

2] Задачи.

1. По пособию 11° - 18°.

2. Докажите, что в описанном четырехугольнике отрезки, соединяющие точки касания сторон четырехугольника с окружностью, и диагонали четырехугольника пересекаются в одной точке.

3. Выразите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, через ее основания.