Решение трудных заданий ОГЭ по математике

Панина Нина Александровна,

учитель математики МБОУ СШ № 33, г. Смоленск,

региональный методист

РЕШЕНИЕ ТРУДНЫХ ЗАДАНИЙ ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Трудными заданиями на ОГЭ, как правило, являются задания с развёрнутым ответом. Основная трудность – в письменной речи выразить причинно-следственные связи, дать необходимые и достаточные обоснования решения.

При этом необходимо иметь в виду, что в первую очередь участник ОГЭ должен показать освоение основных математических закономерностей (формул, правил, алгоритмов), понимание условий их применения, умение применить полученные знания с опорой на справочный материал, умение применить их при решении жизненных ситуаций.

Задание 20.

1. Решите уравнение $x^2-2x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+8$.

Источник условия: https://oge.sdamgia.ru/test?id=67936607

Решение (первый способ).

$$x^2-2x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+8 \qquad (1)$$

Уравнение имеет смысл (определено), если $3-x\geq 0$,

$x\leq 3$.

При этом условии $x^2-2x+\sqrt{3-x}-\sqrt{3-x}-8=0;$

$$x^2-2x-8=0; \qquad (2)$$

$D=b^2-4ac;$

$D=4+32=36.$

$D > 0$, следовательно, уравнение (2) имеет два различных действительных корня.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm 6}{2};$$

$x_1=-2; \quad x_2=4.$

Так как $x\leq 3$, то $x=-2$.

Ответ: –2.

Особенности оформления:

1. **Формулы** дискриминанта, корней не сразу применяем, а **сначала записываем в буквенной символике**.
2. Значение дискриминанта обязательно оцениваем по знаку и **составляем суждение о количестве корней полного квадратного уравнения** (если уравнение является неполным, то этот этап решения отсутствует, так как решение не опирается на дискриминант).
3. Вообще говоря, выписывать в квадратном уравнении значения коэффициентов и свободного члена можно: $a = \dots$, $b = \dots$, $c = \dots$, но не обязательно. Аккуратно подставлять эти значения в расчёт дискриминанта (например, в приведенном задании:

$$D = b^2 - 4ac;$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36\ )$$

можно, но необязательно.

4. Формулу корней можно применить иначе:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

$$x_1 = \frac{2 - 6}{2} = -2; \qquad x_2 = \frac{2 + 6}{2} = 4.$$

Решение (второй способ).

$$x^2-2x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+8 \qquad (1)$$

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}3-x\ge 0,\\ x^2-2x+\sqrt{3-x}-\sqrt{3-x}-8=0.\end{cases} \qquad \begin{cases}3-x\ge 0,\\ x^2-2x-8=0.\end{cases}$$

Решим уравнение $x^2-2x-8=0.$ (2)

$$D=b^2-4ac;$$

$$D=4+32=36.$$

D > 0, следовательно, уравнение (2) имеет два различных действительных корня.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm 6}{2};$$

$$x_1=-2; \quad x_2=4.$$

Имеем:

$$\begin{cases}x=-2,\\ 3-x\ge 0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x=4,\\ 3-x\ge 0;\end{cases}$$

$x=-2$ нет решений.

Ответ: –2.

2. Решите неравенство $x^2(-x^2-64) \le 64(-x^2-64)$.

Источник условия: https://oge.sdamgia.ru/test?id=67936608

Решение

$x^2(-x^2-64) \le 64(-x^2-64)$;

$x^2(-x^2-64) - 64(-x^2-64) \le 0$;

$(-x^2-64)(x^2-64) \le 0$;

$-(x^2+64)(x-8)(x+8) \le 0$;

$(x^2+64)(x-8)(x+8) \ge 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = (x^2+64)(x-8)(x+8)$.

Функция определена на множестве $(-\infty; +\infty)$.

Найдём нули функции. $f(x) = 0$, если $(x^2+64)(x-8)(x+8) = 0$;

$x^2+64=0$	или	$x-8=0$	или	$x+8=0$;
нет решений		$x=8$		$x=-8$.

$f(x) \ge 0$, если $x \in (-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.

Задание 21.

3. Из пунктов *A* и *B*, расстояние между которыми равно 27 км, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста и встретились в 12 км от пункта *B*. Турист, шедший из *A*, сделал в пути получасовую остановку. Найдите скорость туриста, шедшего из *B*, если известно, что он шёл со скоростью, на 2 км/ч меньшей, чем первый турист.

Решение

Пусть x км/ч – скорость первого туриста. Тогда

$(x-2)$ км/ч – скорость второго туриста,

12 км прошёл до встречи второй турист,

(27 – 12), то есть 15 км прошёл до встречи первый турист,

$\left(\frac{15}{x}+\frac{1}{2}\right)$ часов затратил первый турист на путь до встречи,

$\frac{12}{x-2}$ часов затратил второй турист на путь до встречи.

По условию задачи два туриста вышли одновременно и встретились.

Составим и решим уравнение

$$\frac{15}{x}+\frac{1}{2}=\frac{12}{x-2};$$

$$\frac{15}{x}+\frac{1}{2}-\frac{12}{x-2}=0;$$

$$\frac{15\cdot 2(x-2)+x(x-2)-12\cdot 2x}{2x(x-2)}=0;$$

$$\frac{30x-60+x^2-2x-24x}{2x(x-2)}=0;$$

$$\frac{x^2+4x-60}{2x(x-2)}=0;$$

$$\begin{cases} x^2+4x-60=0; \\ 2x(x-2)\neq 0. \end{cases}$$

1) $x^2+4x-60=0.$

$D=4^2-4\cdot 1\cdot(-60)=16+240=256.$

$D>0 \,|\Rightarrow$ уравнение имеет два различных действительных корня.

$\sqrt{D}=\sqrt{256}=16.$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 16}{2}=\frac{2(-2\pm 8)}{2}=-2\pm 8;$$

$x_1=-10,\qquad x_2=6.$

2) Если $x = -10$, то $2x(x-2) \neq 0$ – верно. Следовательно, –10 является корнем уравнения, составленного по тексту задачи.

Если $x = 6$, то $2x(x-2) \neq 0$ – верно. Следовательно, 6 является корнем уравнения, составленного по тексту задачи.

– 10 не соответствует смыслу задачи, так как скорость туриста не может быть отрицательной.

6 км/ч – скорость первого туриста.

6 – 2 = 4 км/ч – скорость второго туриста.

Ответ: скорость второго туриста равна 4 км/ч.

4. Смешали 60-процентный и 30-процентный растворы кислоты, добавили 5 кг чистой воды. Получили 20-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 90-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 70-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 60-процентного раствора использовали для получения смеси? Все процентные содержания растворов даны по массе.

Решение

Пусть x кг – масса 60-процентного раствора,

y кг – масса 30-процентного раствора кислоты. Тогда

$\frac{60}{100}x$, то есть $0,6x$ кг – масса кислоты в 60-процентном растворе,

$\frac{30}{100}y$, то есть $0,3y$ кг – масса кислоты в 30-процентном растворе,

$(x+y+5)$ – масса раствора, полученного после добавления 5 кг чистой воды,

$\frac{20}{100}\cdot(x+y+5)$, то есть $0,2(x+y+5)$ кг – масса кислоты в растворе, полученном в первой ситуации.

Составим и упростим первое уравнение

$$0,6x+0,3y=0,2(x+y+5);$$
$$0,6x+0,3y=0,2x+0,2y+1;$$
$$0,6x-0,2x+0,3y-0,2y=1;$$
$$0,4x+0,1y=1;$$
$$4x+y=10.$$

Если бы добавили 5 кг 90-процентного раствора, то получили бы:

$\frac{90}{100}\cdot 5$, то есть $4,5$ кг – масса кислоты в 30-процентном растворе,

$(x+y+5)$ – масса раствора, полученного после добавления 5 кг кислоты,

$\frac{70}{100}\cdot(x+y+5)$, то есть $0,7(x+y+5)$ кг – масса кислоты в растворе, полученном во второй ситуации.

Составим и упростим второе уравнение

$$0,6x+0,3y+4,5=0,7(x+y+5);$$
$$0,6x+0,3y+4,5=0,7x+0,7y+3,5;$$
$$0,7x-0,6x+0,7y-0,3y=4,5-3,5;$$
$$0,1x+0,4y=1;$$
$$x+4y=10.$$

Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + y = 10, \\ x + 4y = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + y = 10, \\ 5x + 5y = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + y = 10, \\ x + y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 6, \\ y = 4 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

2 кг – масса 60-процентного раствора,

2 кг – масса 30-процентного раствора.

Ответ: использовали 2 кг шестидесятипроцентного раствора кислоты.

Задание 22.

5. Постройте график функции $y=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^2}{x-3}$ и найдите все значения a, при которых прямая $y=a$ не имеет с графиком данной функции общих точек.

Источник условия: https://oge.sdamgia.ru/test?id=67936608

Решение. $y=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^2}{x-3}$

1) $D(y):\ \begin{cases} x^2-5x+6\ge 0, \\ x-3\ne 0. \end{cases}$

Решим неравенство $x^2-5x+6\ge 0$.

$x^2-5x+6=0;$

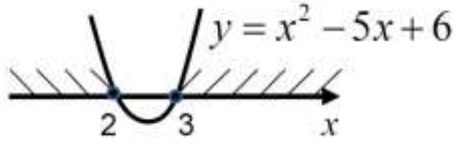
$D=b^2-4ac,$

$D=25-24=1. \quad D>0.$

Уравнение имеет 2 различных действительных корня.

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}; \quad x_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{2};$

$x_1=2; \qquad x_2=3$



$x\le 2$ или $x\ge 3$

Имеем: $\begin{cases} x \le 2, \\ x \ne 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \ge 3, \\ x \ne 3; \end{cases}$

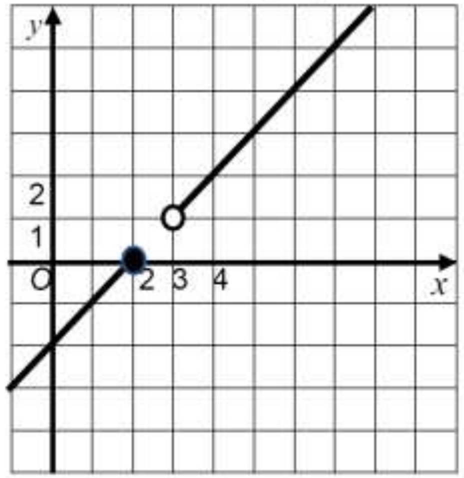
$x \le 2$ $\qquad\qquad$ $x > 3.$

Следовательно, $D(y) = (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.

Так как $\dfrac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^2}{x-3} = \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x-2$ при $x \in (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$, то

$y = x-2$ при $x \in (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.

$$y = \frac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^2}{x-3}$$



$y = x-2$ – линейная функция. Графиком является прямая, проходящая через точки (2; 0) и (4; 2).

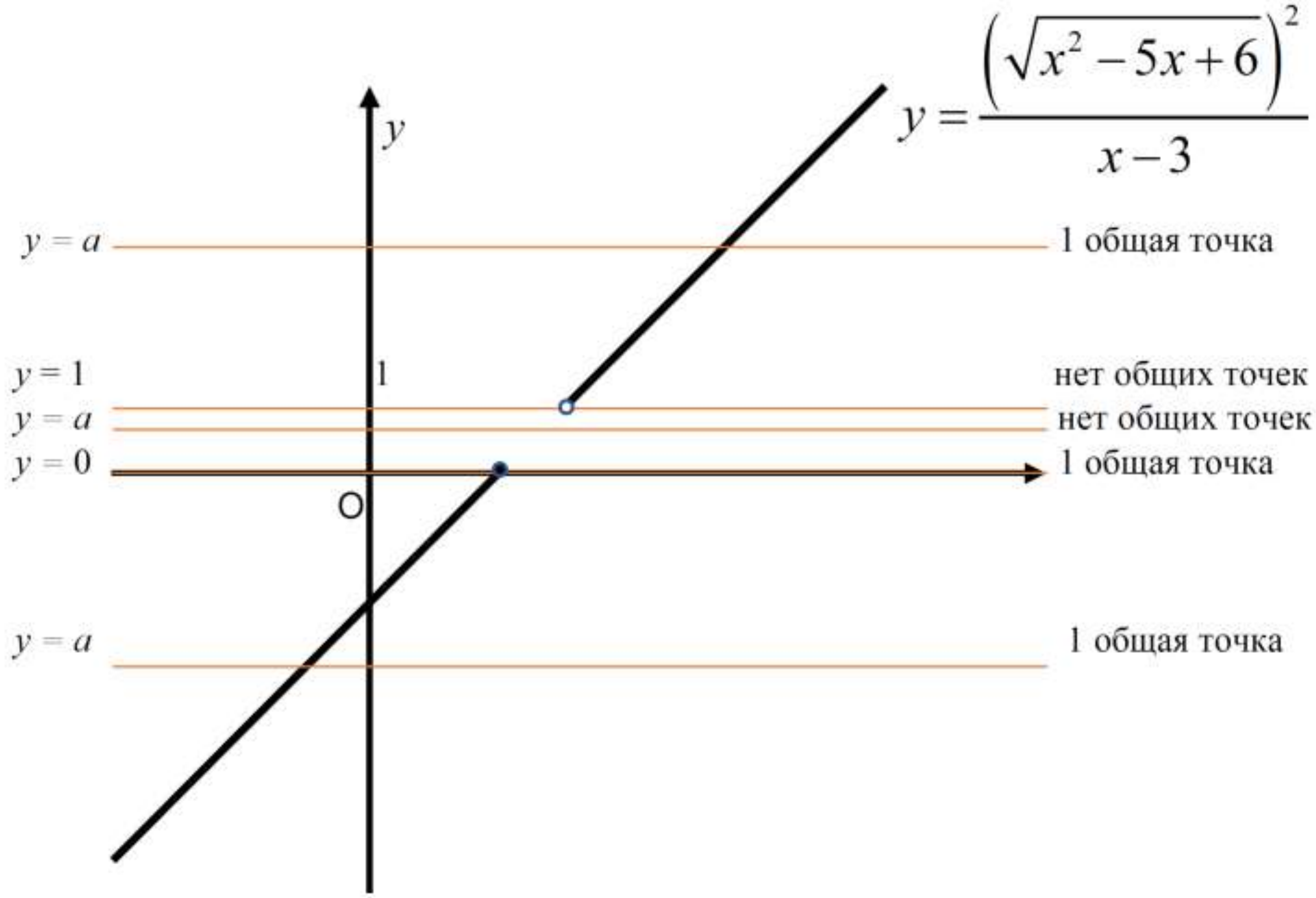
Так как $x \in (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$, то выберем только те части прямой, которые соответствуют условиям $x \le 2,\ x > 3$.

2) Прямые $y = a$ параллельны оси Ox.

Если $a \le 0$, то прямая $y = a$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку;

если $0 < a \le 1$, то общих точек нет;

если $a > 1$, то прямая имеет с графиком функции ровно одну общую точку.



Следовательно, прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек тогда и только тогда, когда $0 < a \le 1$.

Ответ: прямая $y = a$ не имеет с графиком заданной функции общих точек, если $0 < a \le 1$.

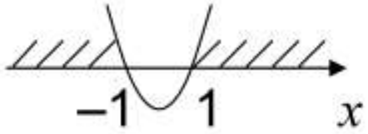
6. Постройте график функции $y=\dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$. Найдите все значения k, при которых прямая $y=kx$ имеет с графиком функции ровно две общие точки.

Решение. $y=\dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$.

1) Найдём область определения функции. Это совокупность всех значений x, удовлетворяющих неравенству $x^2-1>0$.

$$x^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Схематично изобразим параболу $y=x^2-1$ и прочитаем схему.



$x^2-1>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

$D(y)=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

2) Если $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то

$$y = \frac{x-1}{x^2-1}, \qquad y = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}, \qquad y = \frac{1}{x+1}.$$

Итак, $y = \frac{1}{x+1}$, если $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Графиком функции $y = \frac{1}{x+1}$ является гипербола.

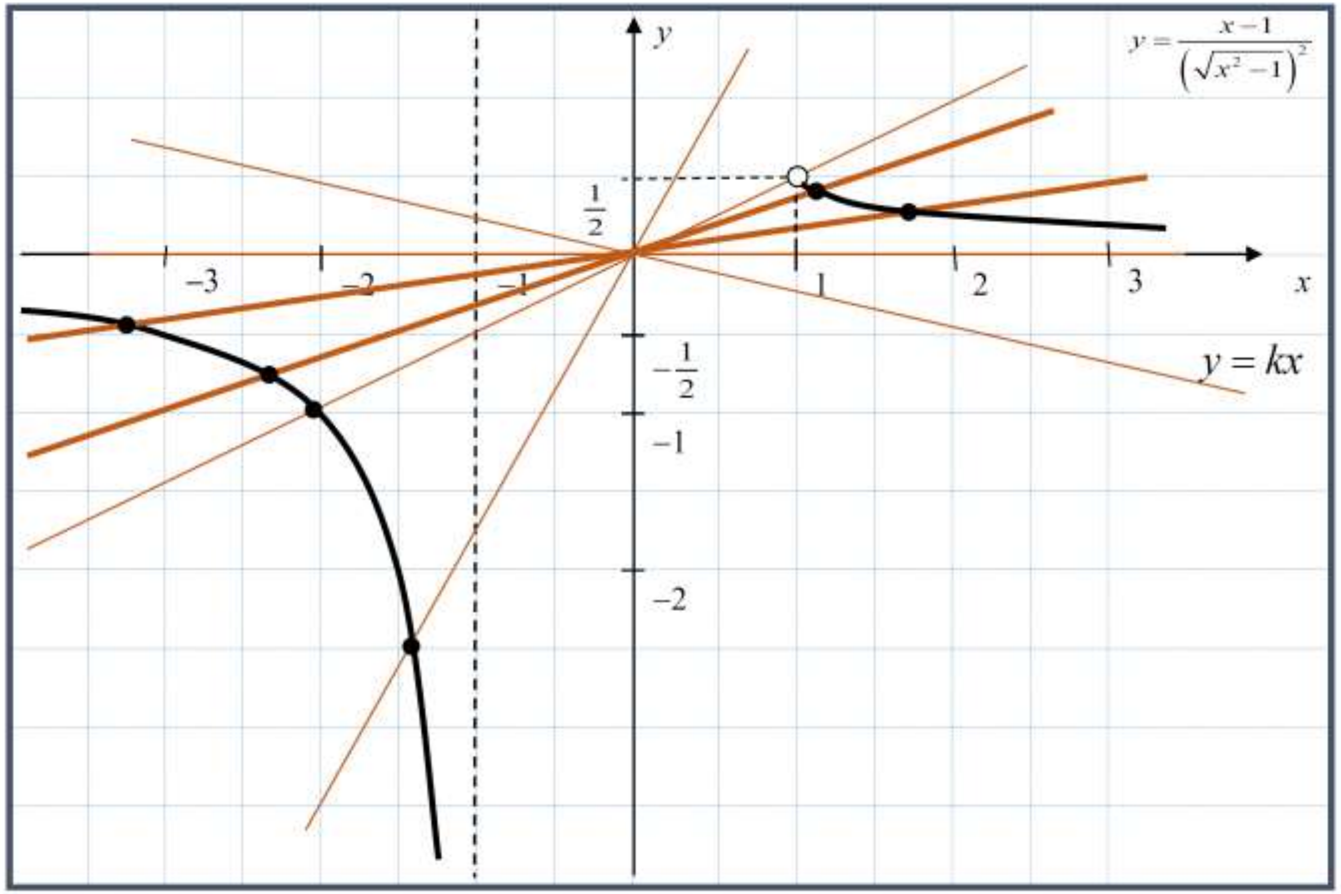
Укажем координаты некоторых её точек.

x	–3	–2	–1,5	2	3
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Выберем те части гиперболы, которые соответствуют условию $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Точка $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ не принадлежит графику функции.

3) Построим график функции $y=\dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$.



Прямая $y=kx$ проходит через начало координат.

Если прямая $y = kx$ проходит через точку $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, то она имеет с графиком функции $y = \frac{x-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$ ровно одну общую точку. В этом случае верно равенство $\frac{1}{2} = k \cdot 1$. Отсюда: $k = \frac{1}{2} = 0,5$.

Если $k \le 0$, то прямая $y = kx$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \frac{x-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$;

если $0 < k < 0,5$, то прямая имеет с графиком функции ровно две общие точки;

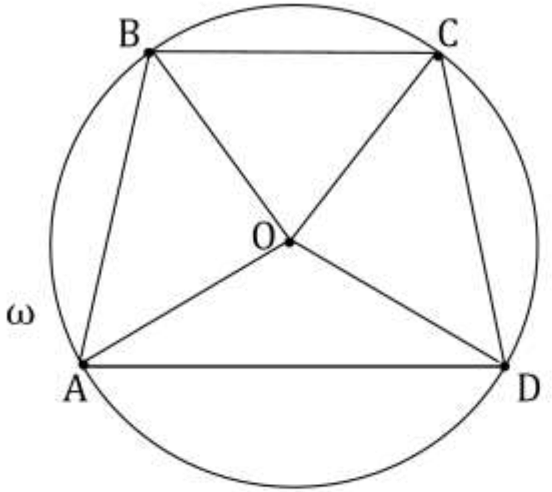
если $k \ge 0,5$, то – ровно одну общую точку.

Следовательно, прямая $y = kx$ имеет с графиком исходной функции ровно две общие точки тогда и только тогда, когда $0 < k < 0,5$.

Ответ: прямая $y = kx$ имеет с графиком исходной функции ровно две общие точки, если $k \in (0; 0,5)$.

Задание 23.

7. Около трапеции с высотой, равной 8, описана окружность, центр которой лежит внутри трапеции. Большее основание трапеции видно из центра окружности под углом 110°, а меньшее под углом 70°. Найдите площадь трапеции.



Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, $AD > BC$,

h – высота, $h = 8$,

$\omega(O, OA)$ – описанная окружность,

$\angle AOD = 110^\circ$, $\angle BOC = 70^\circ$.

Найти: S_{ABCD}.

Решение: $S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot h$.

1) $BC \parallel AD$ (как основания трапеции).

Следовательно, BC и AD – параллельные хорды.

Тогда $\smile AB = \smile DC$ (как дуги между параллельными хордами).

Поэтому $\smile AB = \smile DC = \dfrac{360^\circ - (\smile AD + \smile BC)}{2}$.

2) $\left.\begin{array}{l}\angle AOD \text{ центральный, опирающийся на дугу } AD,\\ \angle AOD = 110^\circ \text{ (по условию)}\end{array}\right| \Rightarrow {}^{\cup}AD = 110^\circ.$

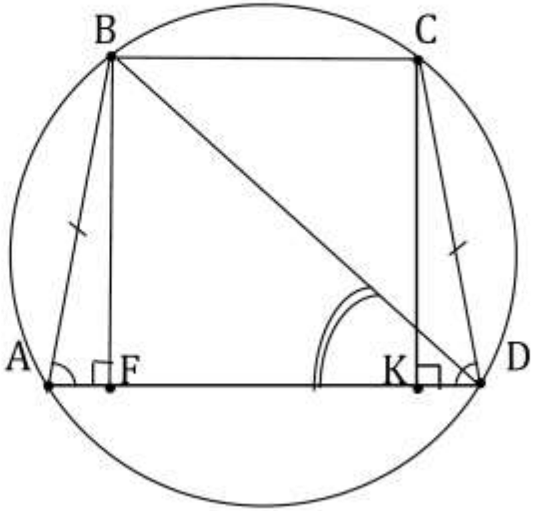
Аналогично, ${}^{\cup}BC = \angle BOC = 70^\circ$.

Следовательно, ${}^{\cup}AB = {}^{\cup}DC = \dfrac{360^\circ - (110^\circ + 70^\circ)}{2} = 90^\circ$.

3) $AB = DC$ как хорды, стягивающие равные дуги.

Следовательно, трапеция $ABCD$ равнобедренная и $BC \parallel AD$, $AB = DC$, $\angle BAD = \angle CDA$ (как углы при нижнем основании AD равнобедренной трапеции).

4) Дополнительное построение: $BF \perp AD$, $F \in AD$, $CK \perp AD$, $K \in AD$, BD – диагональ трапеции.



5) $\angle ADB$ – вписанный, опирающийся на дугу AB. Тогда $\angle ADB = \frac{1}{2}{}^{\cup}AB = \frac{1}{2}\cdot 90^\circ = 45^\circ$, так как ${}^{\cup}AB = 90^\circ$ (из 2-го действия).

Следовательно, ΔBDF прямоугольный с острым углом $\angle ADB = 45^\circ$. Тогда ΔBDF равнобедренный, $BF = FD$.

Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} BF = h = 8, \\ BF = FD \end{array}\right| \Rightarrow BF = FD = 8.$$

6) Рассмотрим треугольники ABF и DCK.

В них $\angle BFA = \angle CKD = 90^\circ$ (из дополнительного построения),

$$\left.\begin{array}{l} AB = DC, \\ \angle BAD = \angle CDA \end{array}\right\}$$ (из 3-го действия).

Тогда $\Delta\, ABF = \Delta\, DCK$ (по гипотенузе и острому углу).

Отсюда $AF = DK$. Следовательно,

$BC + AD = FK + AF + FK + KD = 2 \cdot FK + 2 \cdot KD = 2(FK + KD) = 2 \cdot FD = 2 \cdot 8 = 16,$ так как $FD = 8$ (из 5-го действия).

7) $S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot h$, $S_{ABCD} = \dfrac{16}{2} \cdot 8 = 64$.

Ответ: площадь трапеции равна 64.

8. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 15 и 7, а средняя линия равна 10.

Источник условия: https://oge.sdamgia.ru/test?id=67936608

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!
ЖЕЛАЮ УСПЕХА!

Н. А. ПАНИНА