Решение трудных заданий ЕГЭ по математике

Панина Нина Александровна,

учитель математики МБОУ СШ № 33, г. Смоленск,

региональный методист

Задача на готовом чертеже. Решаем на чертеже, дополнительные записи минимальны (это сокращает затраты времени).

Техника работы:

Шаг 1. Исходные данные наносим на готовый чертёж

Шаг 2. Выделяем фрагмент чертежа, применяем теоретические знания и устанавливаем ещё одно свойство изучаемого объекта. Результат шага наносим на чертеж.

Шаг 3. Выделяем другой фрагмент чертежа, применяем теоретические знания и устанавливаем ещё одно свойство изучаемого объекта. Результат шага отмечаем на чертеже.

И так далее до получения искомого значения.

PS Возможно, что правильно будут установлены свойства, не имеющие отношения к искомой величине. Этого не следует избегать и пытаться предотвратить. На конечный результат решения это не повлияет, а с опытом решения по готовым чертежам значительно уменьшится.

Материал для организации повторения:

https://imc.kurobr.spb.ru/public/users/metodicheskaya/MO/PhisMath/2015/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%20%D0%B3%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%B2%D1%8B%D1%85%20%D1%87%D0%B5%D1%80%D1%82%D0%B5%D0%B6%D0%B0%D1%85%20%D0%91%D0%B0%D0%BB%D0%B0%D1%8F%D0%BD%207-9.pdf

Задание 2. Векторы и операции над ними

Темы заданий:

- Действия над векторами в графической форме

- Действия над векторами в координатной форме

- Длина вектора

- Угол между векторами

ФИПИ

Пример 1

Даны векторы $\vec{a}(2;0)$ и $\vec{b}(1;4)$. Найдите длину вектора $\vec{a}+3\vec{b}$.

ФИПИ

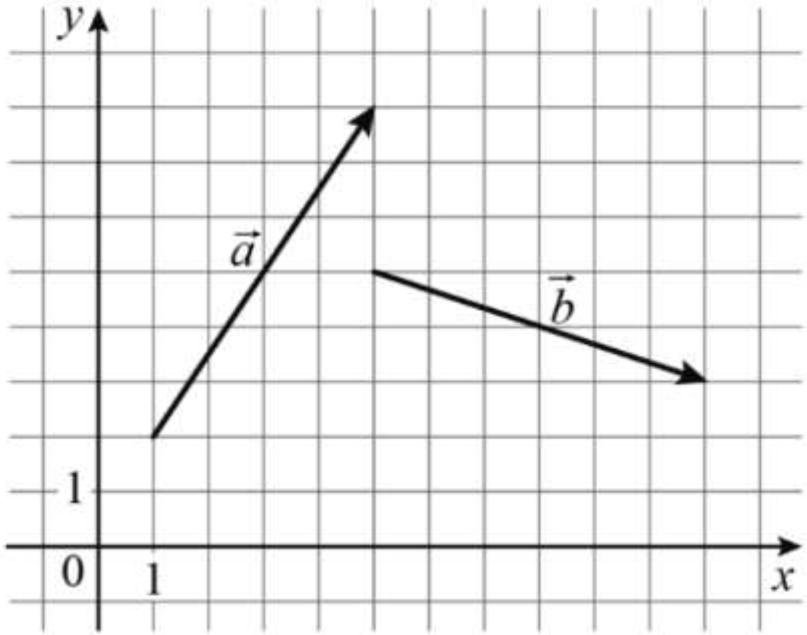
Пример 2

Даны векторы $\vec{a}(5;3)$ и $\vec{b}(4;-6)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Пример 3

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

ФИПИ

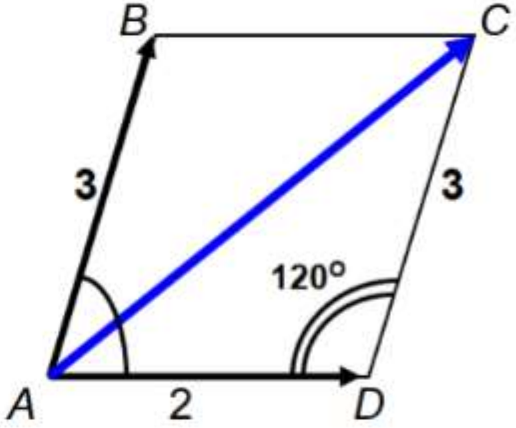


Задание из тренировочной базы

Стороны параллелограмма равны 2 и 3. Они образуют острый угол BAD, равный $60°$.

Найдите квадрат длины вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Решение. Строим параллелограмм, векторы $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{AD}$**, исходные данные наносим на чертёж.**



Устное рассуждение: векторы $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{AD}$ **имеют общее начало. Поэтому их нужно сложить по правилу параллелограмма**

Письменно: на чертеже выполняем сложение векторов. Получаем: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

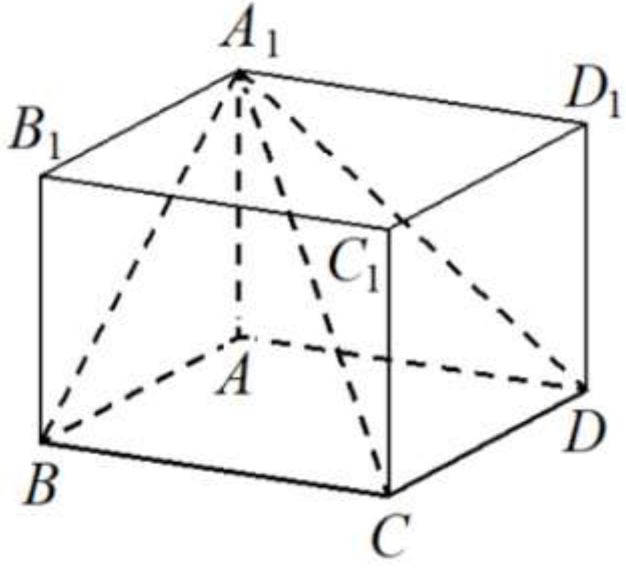
Устное рассуждение: длина вектора $\overrightarrow{AC}$ **равна длине отрезка** AC. **Следовательно, нужно найти квадрат стороны** AC **треугольника** ADC. **Знаем 2 стороны треугольника, угол между ними тупой: 180 – 60 = 120 градусов. Применяем теорему косинусов.**

Письменно: $AC^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos120°=13-12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=19.$

Ответ: 19

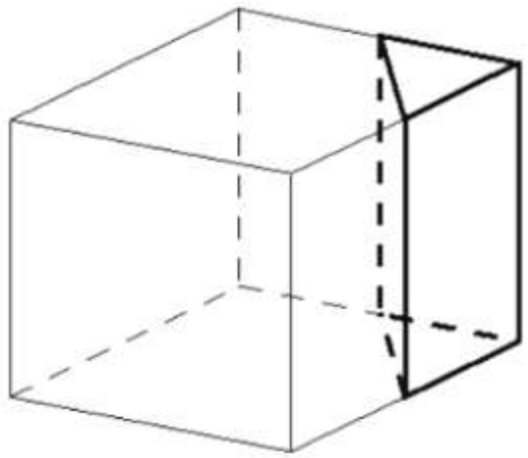
Пример 1

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, D, A_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 9$, $AA_1 = 4$.



Пример 2

Объём куба равен 80. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.



Задание 4. Классическое определение вероятности
В 2024 году на Смоленщине выполняли задание

В группе туристов 20 человек. С помощью жребия они выбирают семь человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Классическая вероятность. Рассмотрим смысловое и формальное решение задачи в общем виде. Пусть в группе *x* человек. Из них нужно выбрать *k* человек, которые пойдут в село за продуктами.

Общее число исходов испытания: $n = C_x^k = \dfrac{x!}{k!\cdot(x-k)!}$

Благоприятные исходы – исходы, в которых Д. вместе с остальными $(k-1)$ **человек пойдёт в село за продуктами.**

Число благоприятных исходов: $m = C_{x-1}^{k-1} = \dfrac{(x-1)!}{(k-1)!\cdot(x-1-(k-1))!} = \dfrac{(x-1)!}{(k-1)!\cdot(x-k)!}$

Тогда $p = \dfrac{m}{n} = \dfrac{(x-1)!}{(k-1)!\cdot(x-k)!} : \dfrac{x!}{k!\cdot(x-k)!} = \dfrac{(x-1)!\cdot k!\cdot \cancel{(x-k)!}}{x!\cdot(k-1)!\cdot \cancel{(x-k)!}} = \dfrac{k}{x}.$

Следовательно, чтобы найти вероятность выбора можно применить формулу формального нахождения вероятности: число участников выбора нужно разделить на общее число участников в группе.

В процессе обучения ряд задач по теории вероятностей следует рассматривать не в конкретной ситуации, а в общем виде.

Задание 5. Теоремы о вероятностях событий. Вероятности сложных событий

Пример 1

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Пример 2

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

В этих задачах вводим легенду (пример 2): П – попал в мишень, Н – не попал. На языке легенды описываем событие: ПННН и, применяя теорему, находим вероятность:

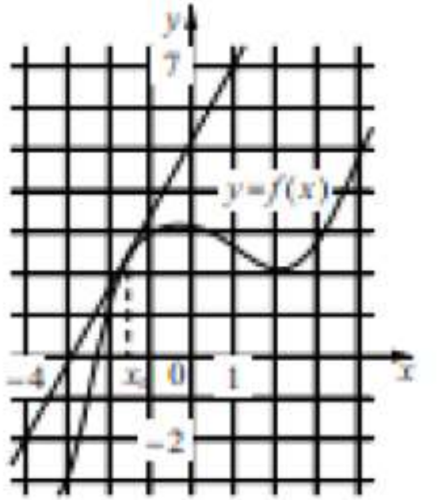
$$P(\text{ПННН}) = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,0189$$

Ответ: 0,0189.

Задание 8. Производная и первообразная

Темы заданий:

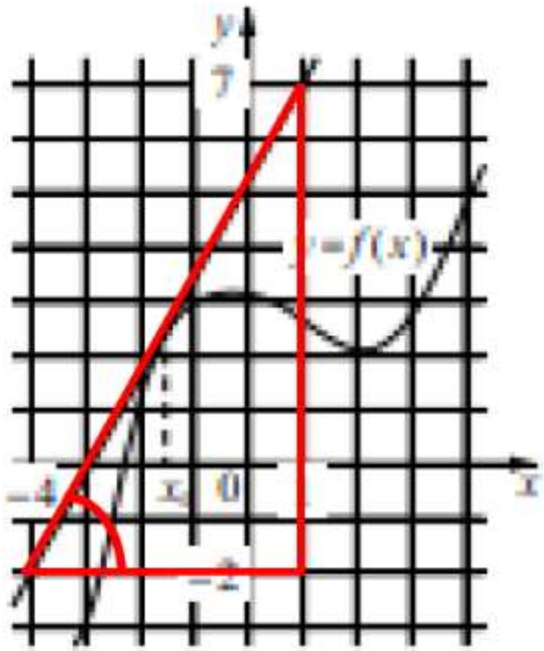
- **Физический смысл производной**
- **Геометрический смысл производной, касательная**
- **Применение производной к исследованию функций**
- **Первообразная**



1. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Решение: $k_{\text{касательной}} = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ (геометрический смысл производной).

α – угол, который касательная образует с ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ оси Ox.



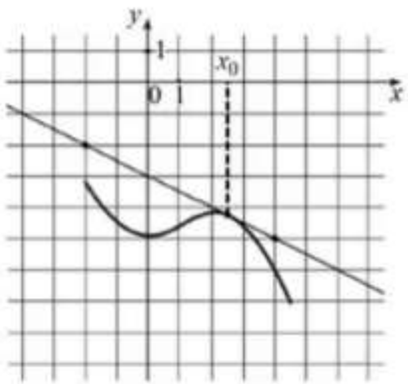
Чтобы найти тангенс этого угла, строим на чертеже прямоугольный треугольник с углом, равным α, причём все три вершины треугольника должны располагаться в узлах сетки (точках пересечения горизонтальной и вертикальной линеек).

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Получаем:

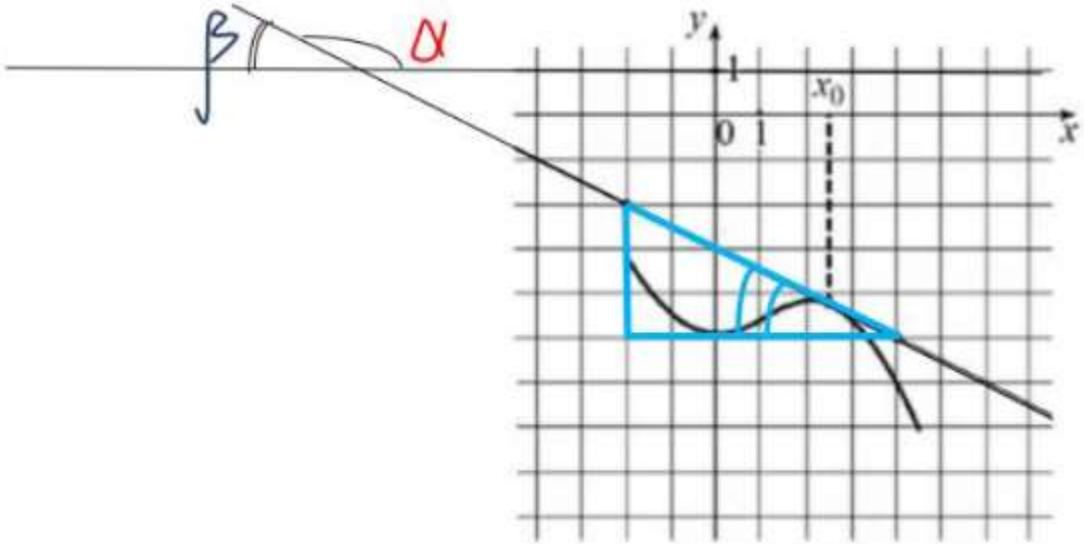
$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = \frac{9}{5} = 1{,}8.$$

Ответ: 1,8

2. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0.
Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0



Решение: $k_{\text{касательной}} = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0).$



α – угол, который касательная образует с ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ оси *Ox*. В данном случае угол является тупым, что не позволяет построить прямоугольный треугольник с углом α. Поэтому переходим к смежному с α углу β и применяем формулу приведения.

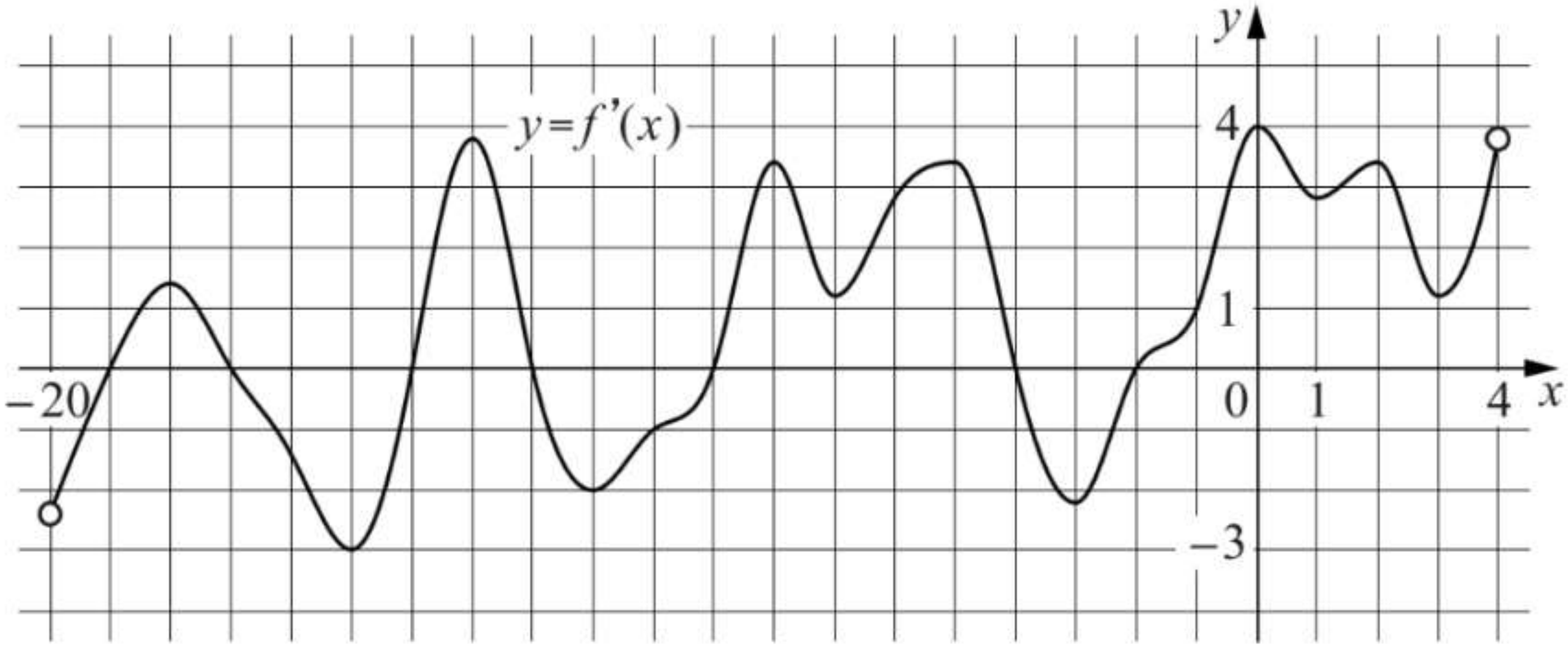
Чтобы найти тангенс угла β, строим на чертеже прямоугольный треугольник с углом, равным β, причём все три вершины треугольника должны располагаться в узлах сетки.

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{3}{6} = -0{,}5$$

Ответ: – 0,5

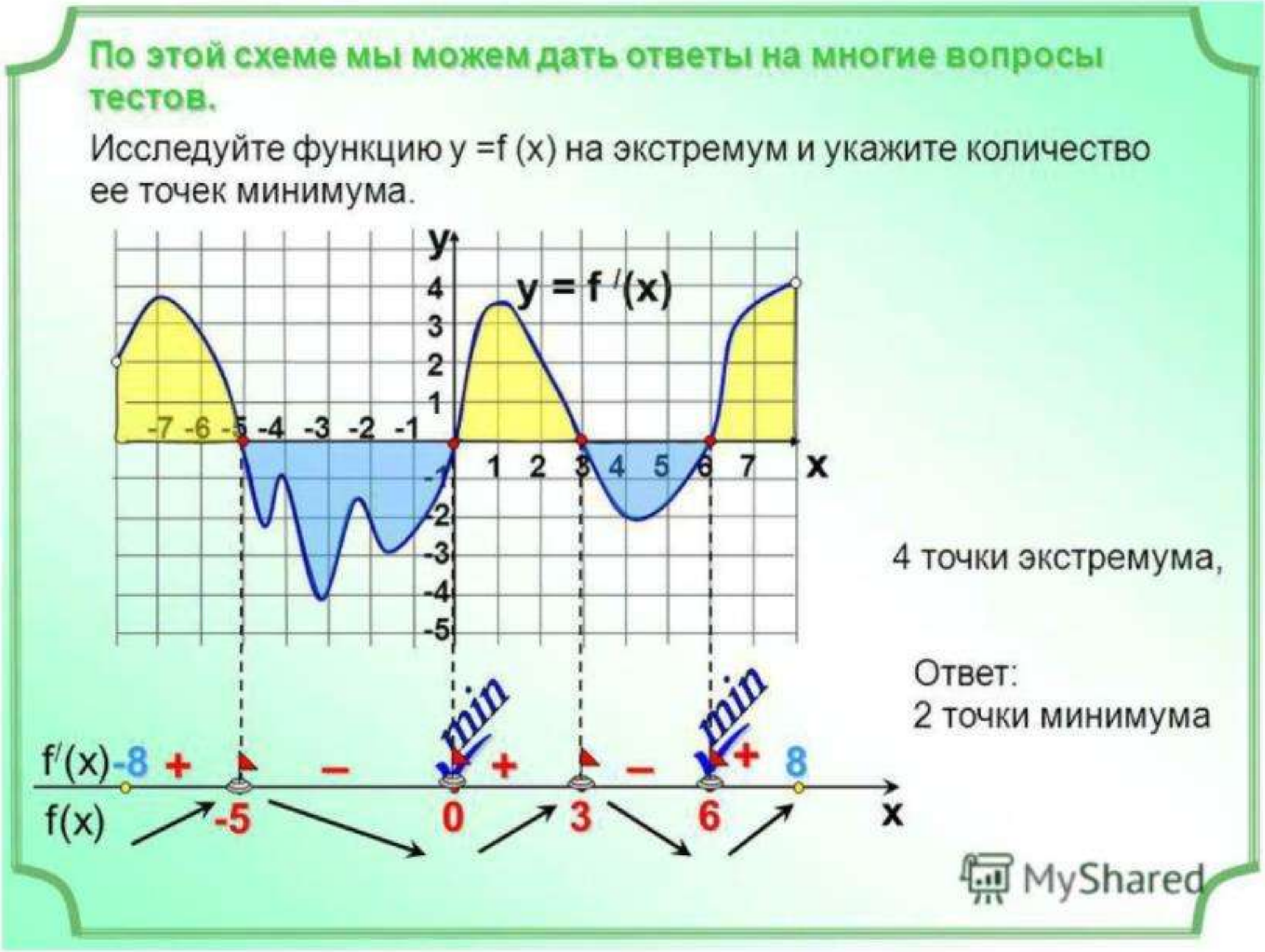
3.

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-20; 4)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-16; 1]$.

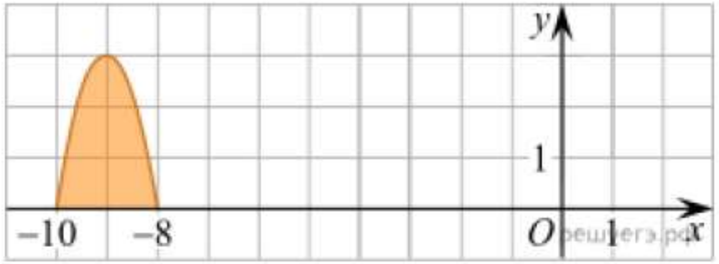


Оптимальная техника выполнения задания представлена на слайде

Электронный ресурс: http://www.myshared.ru/slide/1140328/



Типы заданий на тему «Первообразная». 1. На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$.



Функция $F(x)=-x^3-27x^2-240x-8$ **– одна из первообразных функции** $f(x)$. **Найдите площадь закрашенной фигуры.**

Решение. Закрашенная фигура – это криволинейная трапеция, расположенная выше оси *Ox* и ограниченная графиком непрерывной функции $f(x)$ **и отрезком [–10; –8] оси *Ox*. Тогда**

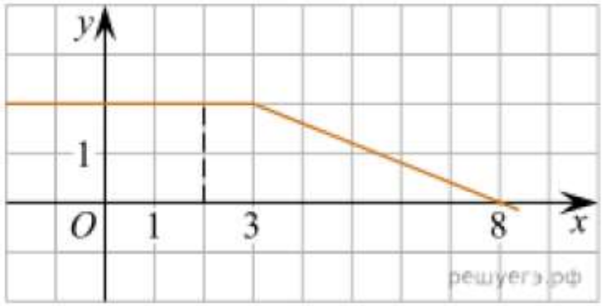
$$S_{\text{фигуры}}=\int_{-10}^{-8} f(x)\,dx=F(x)\Big|_{-10}^{-8}=\left(-x^3-27x^2-240x-8\right)\Big|_{-10}^{-8}=$$

$$=\left(-(-8)^3-27\cdot(-8)^2-240\cdot(-8)-8\right)-\left(-(-10)^3-27\cdot(-10)^2-240\cdot(-10)-8\right)=$$

$$=512-27\cdot 64+240\cdot 8\cancel{-8}-1000+2700-2400\cancel{+8}=512+64\cdot(-27+30)-700=192-188=4$$

Ответ: 4.

2. На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8)-F(2)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.



Решение. По формуле Ньютона-Лейбница $F(8)-F(2)=F(x)\Big|_2^8=\int\limits_2^8 f(x)\,dx$, так как $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.

Исходя из геометрического смысла определённого интеграла, полученный интеграл выражает площадь трапеции, расположенной выше оси *Ox* и ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$, снизу – отрезком [2; 8] оси *Ox*. Тогда

$$F(8)-F(2)=\int\limits_2^8 f(x)\,dx=S_{\text{трапеции}}=\frac{1+6}{2}\cdot 2=7.$$

Ответ: 7.

10. Текстовые задачи

Темы заданий:

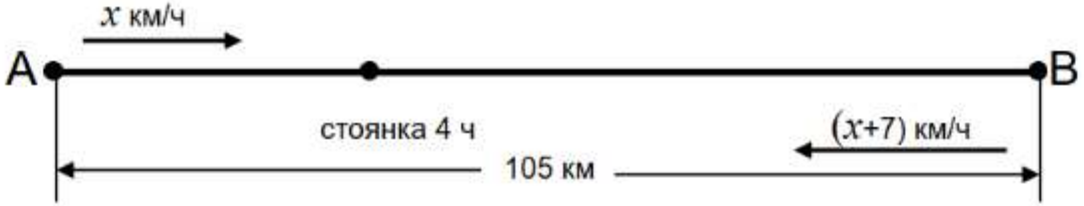
- Задачи на проценты, смеси и сплавы
- Задачи на движение по прямой
- Задачи на движение по окружности
- Задачи на движение по воде
- Задачи на совместную работу
- Задачи на прогрессии

Особенность решения текстовой задачи:

1) дробно-рациональное уравнение решаем не по алгоритму, а дополняем логическим смыслом и получаем математическую модель с ограничениями. Это позволяет сократить затраты времени,
2) при решении квадратного уравнения дискриминант **не вычисляем**, а **раскладываем на множители**. Это позволяет быстрее найти значение арифметического квадратного корня из дискриминанта

Велосипедист выехал из города *A* в город *B*, расстояние между которыми равно 105 км. Его скорость была постоянной на протяжении всего пути. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. В пути он сделал остановку, которая составила 4 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь от *A* до *B*. Найдите скорость велосипедиста на пути из *B* в *A*. Ответ дайте в километрах в час.

Решение.



$$\frac{105}{x}=\frac{105}{x+7}+4.$$

По смыслу задачи $x>0,\ x+7>0$. Тогда

$$105(x+7)=105x+4x(x+7),$$

$$105x+105\cdot 7=105x+4x^2+28x,$$

$$4x^2+28x-105\cdot 7=0,$$

$$D=4\cdot 7\cdot 4\cdot 7+4\cdot 4\cdot 7\cdot 15\cdot 7=28^2\cdot(1+15)=28^2\cdot 4^2=112^2,$$

$$x_1=\frac{-28-112}{8}<0,\text{ не подходит;}\qquad x_2=\frac{-28+112}{8}=\frac{84}{8}=10{,}5.$$

10,5 км/ч – скорость велосипедиста на пути из *A* в *B*.

10,5 + 7 = 17,5 (км/ч) – скорость на пути из *B* в *A*.

Ответ: 17,5 (как на ЕГЭ)

Обзор тригонометрических заданий за последние годы (источники: открытые варианты КИМ ЕГЭ)

13 а) Решите уравнение

$$\cos 2x - \sqrt{2}\sin(x+\pi) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

13 а) Решите уравнение

$$\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

13

а) Решите уравнение

$$\cos 2x - 3\sin(-x) - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

13

а) Решите уравнение $2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos 2x + \sin x = \sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

13

а) Решите уравнение $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Следующее задание из ЕГЭ-2024.

15. Решите неравенство $\dfrac{3\lg^2 x-8}{\lg^2 x-4}\ge 2$.

Решение. $\dfrac{3\lg^2 x-8}{\lg^2 x-4}\ge 2$

Пусть $\lg x = t$, тогда неравенство примет вид $\dfrac{3t^2-8}{t^2-4}\ge 2$.

$$\frac{3t^2-8}{t^2-4}\ge 2 \iff \frac{3t^2-8}{t^2-4}-2\ge 0 \iff \frac{3t^2-8-2t^2+8}{t^2-4}\ge 0 \iff$$

$$\iff \frac{t^2}{t^2-4}\ge 0 \iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{t^2}{t^2-4}=0, \\ \dfrac{t^2}{t^2-4}>0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} t=0, \\ \begin{cases} t\ne 0, \\ t^2-4>0 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t<-2, \\ t>2. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 0, \\ \lg x < -2, \\ \lg x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ \lg x < \lg 0,01, \\ \lg x > \lg 100 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ 0 < x < 0,01, \\ x > 100. \end{array}\right.$$

Ответ: $(0; 0,01) \cup \{1\} \cup (100; +\infty)$.

Обратим внимание на то, что, решая неравенство $\lg x < \lg 0,01$, единственно правильный путь – это **переход к равносильному неравенству** $0 < x < 0,01$.

Оформление перехода в виде: $\lg x < \lg 0,01$,

$x < 0,01$,

но с учётом ОДЗ $0 < x < 0,01$ – **грубая ошибка,** так как неравенства $\lg x < \lg 0,01$ и $x < 0,01$ неравносильны.

Решите неравенство $2^{x^2-4x+5} \le 1+\sin^2\frac{\pi x}{4}$.

1) $x^2-4x+5=\left(x^2-4x+4\right)+1=\left(x+2\right)^2+1$

2) $2^{x^2-4x+5}=2^{(x+2)^2+1}$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$-\infty < x+2 < +\infty$$

$$0 \le \left(x+2\right)^2 < +\infty$$

$$1 \le \left(x+2\right)^2+1 < +\infty$$

$$2 \le 2^{(x+2)^2+1} < +\infty$$

3) $1+\sin^2\frac{\pi x}{4}$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$-\infty < \frac{\pi x}{4} < +\infty$$

$$-1 \le \sin\frac{\pi x}{4} \le 1$$

$$0 \le \sin^2\frac{\pi x}{4} \le 1$$

$$1 \le 1+\sin^2\frac{\pi x}{4} \le 2$$

4) $2^{x^2-4x+5} \le 1+\sin^2\frac{\pi x}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le 2^{x^2-4x+5} < +\infty, \\ 1 \le 1+\sin^2\frac{\pi x}{4} \le 2, \\ 2^{x^2-4x+5} \le 1+\sin^2\frac{\pi x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-4x+5} = 2, \\ 1+\sin^2\frac{\pi x}{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+5=1, \\ \sin^2\frac{\pi x}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4=0, \\ \sin^2\frac{\pi x}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2=0, \\ \sin^2\frac{\pi x}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ \sin^2\frac{\pi x}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2.$$

Ответ: 2 – единственное решение исходного неравенства.

4) **Самый надёжный способ решения неравенства**, следующий:

- к условию присоединить все ограничения и получить систему, равносильную исходному неравенству;

- полученную систему упростить, если есть такая возможность;

- решить отдельно все неравенства системы (если есть возможность, то решать не на всей числовой прямой, а только в области допустимых значений);

- построить геометрическую модель с выделением множества решений каждого неравенства и найти решение всей системы.

Поскольку исходное неравенство и система равносильны, то полученное множество будет являться и множеством решений исходного неравенства.

Желаю успеха в овладении умением!

7. В июле 2025 года планируется взять кредит на 10 лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на r % по сравнению с концом предыдущего года (r – целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей.

Найдите r.

Источник: https://alexlarin.net/ege/2023/15_2023.html

Решение. Первый способ.

Пусть 800 тыс. рублей = S тыс. рублей.

Пусть $r\% = \frac{r}{100} = k$.

Пусть к июлю 2026 – 2030 годов долг уменьшается на a тыс. рублей по сравнению с долгом на июль предыдущего года.

Пусть к июлю 2031 – 2035 годов долг уменьшается на b тыс. рублей по сравнению с долгом на июль предыдущего года.

Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

Год	В январе банк увеличит долг на … тыс. рублей	Клиент выплатит … тыс. рублей	Долг в конце года, тыс. рублей
2025	-	-	S
2026	kS	$kS+a$	$S-a$
2027	$k(S-a)=kS-ka$	$kS-ka+a$	$S-2a$
2028	$k(S-2a)=kS-2ka$	$kS-2ka+a$	$S-3a$
2029	$k(S-3a)=kS-3ka$	$kS-3ka+a$	$S-4a$
2030	$k(S-4a)=kS-4ka$	$kS-4ka+a$	$S-5a=200$
2031	$200k$	$200k+b$	$200-b$
2032	$k(200-b)=200k-kb$	$200k-kb+b$	$200-2b$
2033	$k(200-2b)=200k-2kb$	$200k-2kb+b$	$200-3b$
2034	$k(200-3b)=200k-3kb$	$200k-3kb+b$	$200-4b$
2035	$k(200-4b)=200k-4kb$	$200k-4kb+b$	$200-5b=0$

По условию задачи в июле 2030 года долг должен составить 200 тыс. рублей, а к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью. Тогда в 2035 году остаток долга равен 0.

$$\begin{cases} S-5a=200, \\ 200-5b=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 800-5a=200, \\ b=40 \end{cases} \quad \begin{cases} a=120, \\ b=40. \end{cases}$$

На 120 тыс. рублей ежегодно уменьшался долг в 2026-2030 годах, на 40 тыс. рублей – в 2031-2035 годах.

Сумма всех платежей после полного погашения кредита составит

($5kS + 1000k - 10ka - 10kb + 5a + 5b$) тыс. рублей. Это (по условию) 1480 тыс. рублей.

Учтём, что $S = 800$, $a = 120$, $b = 40$, тогда получим:

$$5k \cdot 800 + 1000k - 10k \cdot 120 - 10k \cdot 40 + 5 \cdot 120 + 5 \cdot 40 = 1480;$$

$$4000k + 1000k - 1200k - 400k + 600 + 200 = 1480;$$

$$3400k = 680;$$

$$10k = 2;$$

$$k = 0,2.$$

Так как $k = \frac{r}{100}$, то $\frac{r}{100} = 0,2; \quad r = 20.$

20 – целое число, что соответствует условию задачи.

Каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года.

Ответ: $r = 20$.

Второй способ.

За первые 5 лет сумма основного долга должна равномерно уменьшиться на (800 – 200), то есть на 600 тыс. рублей. Следовательно, в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на 120 тыс. рублей меньше долга на июль предыдущего года.

За следующие 5 лет сумма основного долга должна равномерно уменьшиться с 200 тыс. рублей до 0. Следовательно, в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на 40 тыс. рублей меньше долга на июль предыдущего года

Пусть 800 тыс. рублей = *S* тыс. рублей,

120 тыс. рублей = a тыс. рублей – сумма, на которую к июлю 2026 – 2030 годов уменьшается долг по сравнению с долгом на июль предыдущего года,

40 тыс. рублей = b тыс. рублей – сумма, на которую к июлю 2031 – 2035 годов уменьшается долг на по сравнению с долгом на июль предыдущего года.

Пусть $r\% = \frac{r}{100} = k$.

Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

Год	В январе банк увеличит долг на … тыс. рублей	Клиент выплатит … тыс. рублей	Долг в конце года, тыс. рублей
2025	-	-	S
2026	kS	$kS + a$	$S - a$
2027	$k(S - a) = kS - ka$	$kS - ka + a$	$S - 2a$
2028	$k(S - 2a) = kS - 2ka$	$kS - 2ka + a$	$S - 3a$
2029	$k(S - 3a) = kS - 3ka$	$kS - 3ka + a$	$S - 4a$
2030	$k(S - 4a) = kS - 4ka$	$kS - 4ka + a$	$S - 5a = 200$
2031	$200k$	$200k + b$	$200 - b$
2032	$k(200 - b) = 200k - kb$	$200k - kb + b$	$200 - 2b$
2033	$k(200 - 2b) = 200k - 2kb$	$200k - 2kb + b$	$200 - 3b$
2034	$k(200 - 3b) = 200k - 3kb$	$200k - 3kb + b$	$200 - 4b$
2035	$k(200 - 4b) = 200k - 4kb$	$200k - 4kb + b$	$200 - 5b = 0$

Сумма всех платежей после полного погашения кредита составит

$(5kS + 1000k - 10ka - 10kb + 5a + 5b)$ тыс. рублей. Это (по условию) 1480 тыс. рублей.

Учтём, что $S = 800$, $a = 120$, $b = 40$, тогда получим:

$$5k \cdot 800 + 1000k - 10k \cdot 120 - 10k \cdot 40 + 5 \cdot 120 + 5 \cdot 40 = 1480;$$

$$4000k + 1000k - 1200k - 400k + 600 + 200 = 1480;$$

$$3400k = 680;$$

$$10k = 2;$$

$$k = 0,2.$$

Так как $k = \frac{r}{100}$, то $\frac{r}{100} = 0,2; \quad r = 20.$

20 – целое число, что соответствует условию задачи.

Каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года.

Ответ: $r = 20$.

18.1 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x-a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Источник условия: КИМ ЕГЭ-2024, профильная математика, открытый вариант

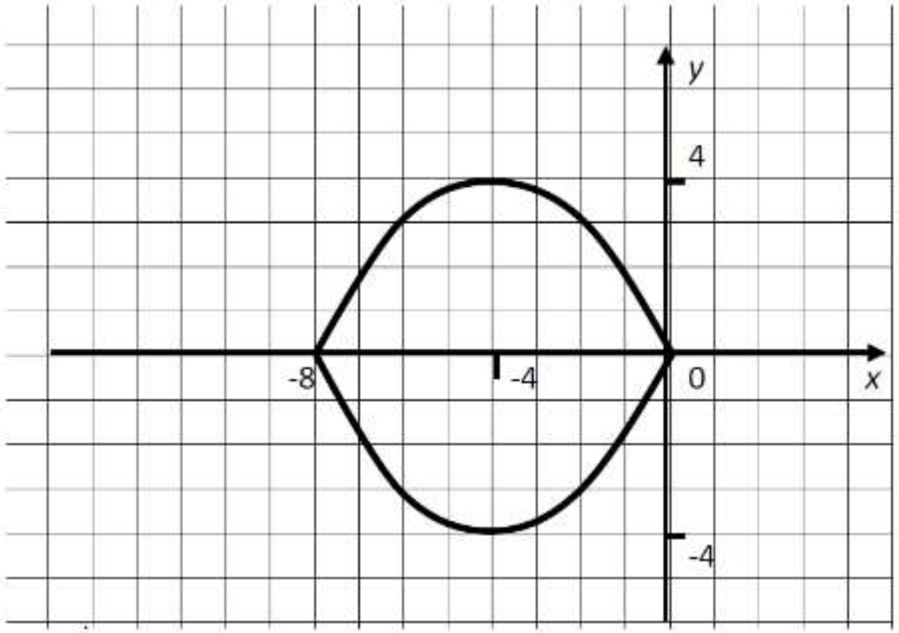
Решение. Первый способ

$$\begin{cases} y = |x-a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

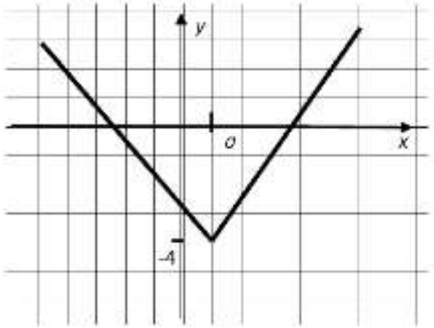
1) $4|y| + x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow 4|y| = -x^2 - 8x \Leftrightarrow |y| = -\dfrac{x^2}{4} - 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < 0, \\ -y = -\dfrac{x^2}{4} - 2x \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq 0, \\ y = -\dfrac{x^2}{4} - 2x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} + 2x, \\ y < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{4} - 2x, \\ y \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + 2x, \text{ если } y < 0, \\ -\dfrac{x^2}{4} - 2x, \text{ если } y \geq 0. \end{cases}$$

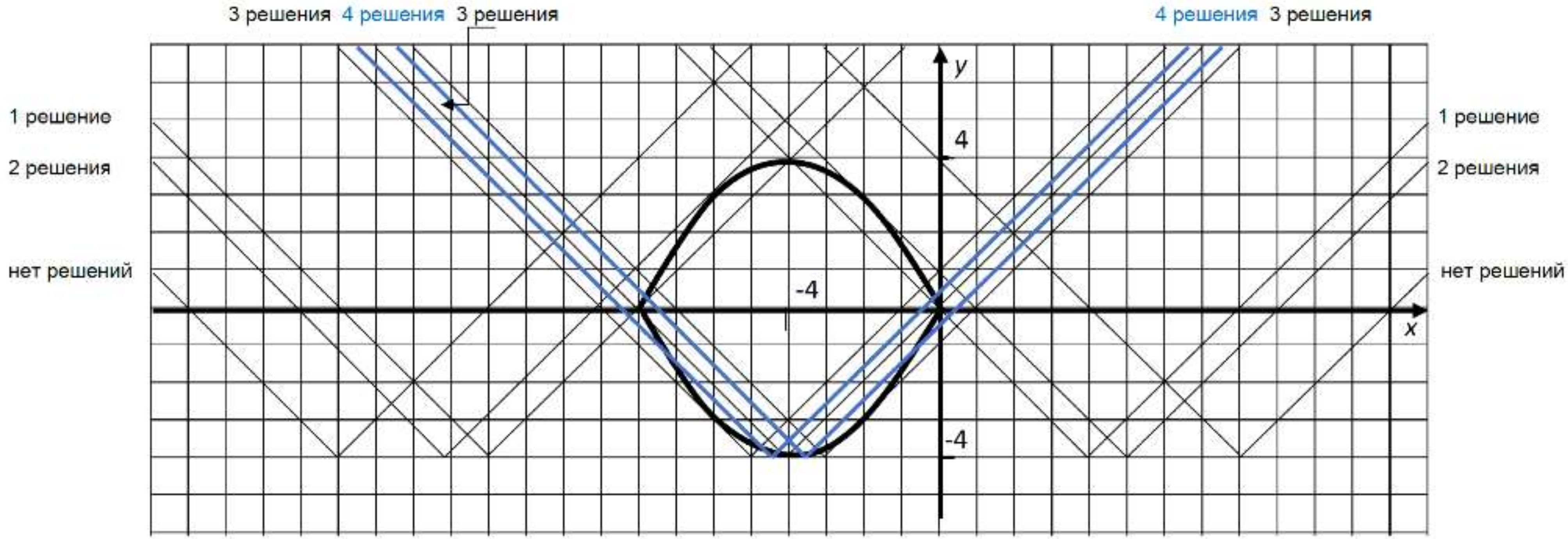


2) График функции $y = |x - a| - 4$ может быть получен из графика функции $y = |x - a|$ смещением на 4 единичных отрезка вниз. Таким образом, при изменении значения параметра a точка излома графика функции $y = |x - a| - 4$ будет смещаться по прямой $y = -4$.



$$y = \begin{cases} -x + a - 4, \text{ если } x < a, \\ x - a - 4, \text{если } x \geq a. \end{cases}$$

3) Проведём исследование взаимного расположения графиков уравнений системы, установим количество общих точек графиков. Каждой общей точке соответствует одно решение исходной системы уравнений.



Правый луч касается параболы, расположенной выше, если $\left(-\frac{x^2}{4}-2x\right)'=1$, то есть в точке x_0 = –6. Тогда $-\frac{(-6)^2}{4}-2\cdot(-6)=-6-a-4 \;\Leftrightarrow\; a=-10+9-12 \;\Leftrightarrow\; a=-13.$ Исходная система имеет ровно одно решение, так как левый луч не имеет общих точек с параболами.

При a < –13 исходная система не имеет решений.

Левый луч касается параболы, расположенной ниже, если $\left(\frac{x^2}{4}+2x\right)'=-1$, то есть в точке x_0 = –6. Тогда $\frac{(-6)^2}{4}+2\cdot(-6)=-(-6)+a-4 \;\Leftrightarrow\; a=9-12-2 \;\Leftrightarrow\; a=-5.$ Исходная система имеет ровно три различных решения, так как правый луч при этом пересекает каждую из двух парабол.

При –13 < a < –5 исходная система имеет ровно два различных решения (левый луч не имеет общих точек с параболами, а правый пересекает каждую из двух парабол).

Точка излома графика функции $y=|x-a|-4$ совпадает с вершиной параболы, расположенной ниже, если $\begin{cases} x=-4, \\ y=-4, \\ y=|x-a|-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4, \\ x=-4, \\ y=-4. \end{cases}$ Исходная система имеет ровно три различных решения (общими точками графиков уравнений являются вершина параболы, расположенной ниже, и обе точки склеивания парабол).

При –5 < a < –4 исходная система имеет ровно четыре различных решения (каждый из двух лучей пересекает каждую из двух парабол).

Правый луч касается параболы, расположенной ниже, если $\left(\frac{x^2}{4}+2x\right)'=1$, то есть в точке x_1 = –2. Тогда $\frac{(-2)^2}{4}+2\cdot(-2)=-2-a-4 \iff a=-6-1+4 \iff a=-3$. Исходная система имеет ровно три различных решения, так как левый луч при этом пересекает каждую из двух парабол.

При –4 < a < –3 исходная система имеет ровно четыре различных решения (каждый из двух лучей пересекает каждую из двух парабол).

Левый луч касается параболы, расположенной выше, если $\left(-\frac{x^2}{4}-2x\right)'=-1$, то есть в точке x_1 = –2. Тогда $-\frac{(-2)^2}{4}-2\cdot(-2)=-(-2)+a-4 \iff a=-1+4+2 \iff a=5$. Исходная система имеет ровно одно решение, так как правый луч не имеет общих точек с параболами.

При –3 < a < 5 исходная система имеет ровно два различных решения (правый луч не имеет общих точек с параболами, а левый пересекает каждую из двух парабол).

При a > 5 исходная система не имеет решений.

Следовательно, исходная система имеет ровно 4 различных решения тогда и только тогда, когда –5 < a < –4, –4 < a < –3.

Ответ: –5 < a < –4, –4 < a < –3.

Второй способ.

$$\begin{cases} y=|x-a|-4, \\ 4|y|+x^2+8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=|x-a|-4, \\ 4\big||x-a|-4\big|+x^2+8x=0 \end{cases}$$

1) $$4\big||x-a|-4\big|+x^2+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a<0, \\ 4|-x+a-4|+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-a\ge 0, \\ 4|x-a-4|+x^2+8x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a<0, \\ 4|-x+a-4|+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-a\ge 0, \\ 4|x-a-4|+x^2+8x=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a<0, \\ -x+a-4<0, \\ 4(x-a+4)+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-a<0, \\ -x+a-4\ge 0, \\ 4(-x+a-4)+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-a\ge 0, \\ x-a-4<0, \\ 4(-x+a+4)+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-a\ge 0, \\ x-a-4\ge 0, \\ 4(x-a-4)+x^2+8x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>x, \\ a<x+4, \\ 4x-4a+16+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a>x, \\ a\ge x+4, \\ -4x+4a-16+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\le x, \\ a>x-4, \\ -4x+4a+16+x^2+8x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\le x, \\ a\le x-4, \\ 4x-4a-16+x^2+8x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<a<x+4, \\ x^2+12x-4a+16=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\ge x+4, \\ x^2+4x+4a-16=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-4<a\le x, \\ x^2+4x+4a+16=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\le x-4, \\ x^2+12x-4a-16=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < a < x+4, \\ x^2+12x-4a+16=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \ge x+4, \\ x^2+4x+4a-16=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-4 < a \le x, \\ x^2+4x+4a+16=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \le x-4, \\ x^2+12x-4a-16=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < a < x+4, \\ 4a = x^2+12x+16 \end{cases} \\ \begin{cases} a \ge x+4, \\ 4a=-x^2-4x+16 \end{cases} \\ \begin{cases} x-4 < a \le x, \\ 4a=-x^2-4x-16 \end{cases} \\ \begin{cases} a \le x-4, \\ 4a=x^2+12x-16 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < a < x+4, \\ a=\frac{1}{4}x^2+3x+4 \end{cases} \\ \begin{cases} a \ge x+4, \\ a=-\frac{1}{4}x^2-x+4 \end{cases} \\ \begin{cases} x-4 < a \le x, \\ a=-\frac{1}{4}x^2-x-4 \end{cases} \\ \begin{cases} a \le x-4, \\ a=\frac{1}{4}x^2+3x-4 \end{cases} \end{array}\right.$$

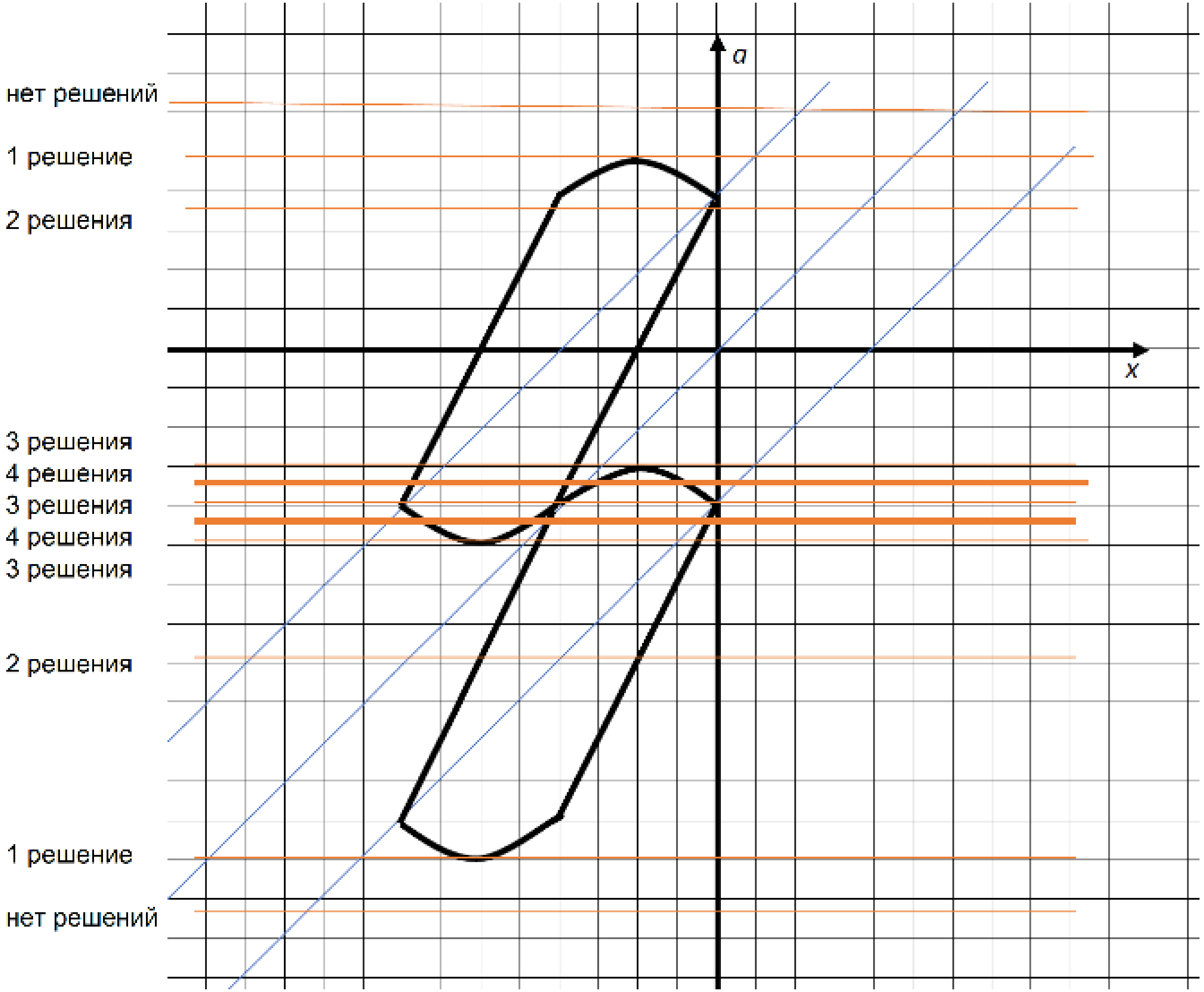
Следовательно, графиком уравнения $4\big||x-a|-4\big|+x^2+8x=0$ является совокупность четырёх парабол с ограничениями.

Вершина первой параболы располагается в точке (–6; –5), второй – в точке (–2; 5), третьей – в точке (–2; –3), четвёртой – в точке (–6; –13).

Точки склеивания частей парабол (0; –4), (0; 4), (–8; –4), (–8; –12).

Точка касания парабол (–4; –4).

Рассмотрим функцию $y = |x - a| - 4$. Каждому значению x соответствует ровно одно значение y. Следовательно, сколько раз прямая, параллельная оси абсцисс пересекает график функции $a(x)$, столько решений имеет исходная система при фиксированном значении a.



Итак, если $a < -13$, то графики не имеют общих точек, следовательно, исходная система не имеет решений,

если $a = -13$, то — ровно 1 решение,

если $-13 < a < -5$, то — ровно 2 решения,

если $a = -5$, то — ровно 3 решения,

если $-5 < a < -4$, то — ровно 4 решения,

если $a = -4$, то — ровно 3 решения,

если $-4 < a < -3$, то — ровно 4 решения,

если $a = -3$, то — ровно 3 решения,

если $-3 < a < 5$, то — ровно 2 решения,

если $a = 5$, то — ровно 1 решение,

если $a > 5$, то — нет решений.

Следовательно, исходная система имеет ровно 4 различных решения тогда и только тогда, когда $a \in (-5; -4) \cup (-4; -3)$.

Ответ: при $a \in (-5; -4) \cup (-4; -3)$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!
ЖЕЛАЮ УСПЕХА!

Н. А. ПАНИНА