ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ
2017 – 2018

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

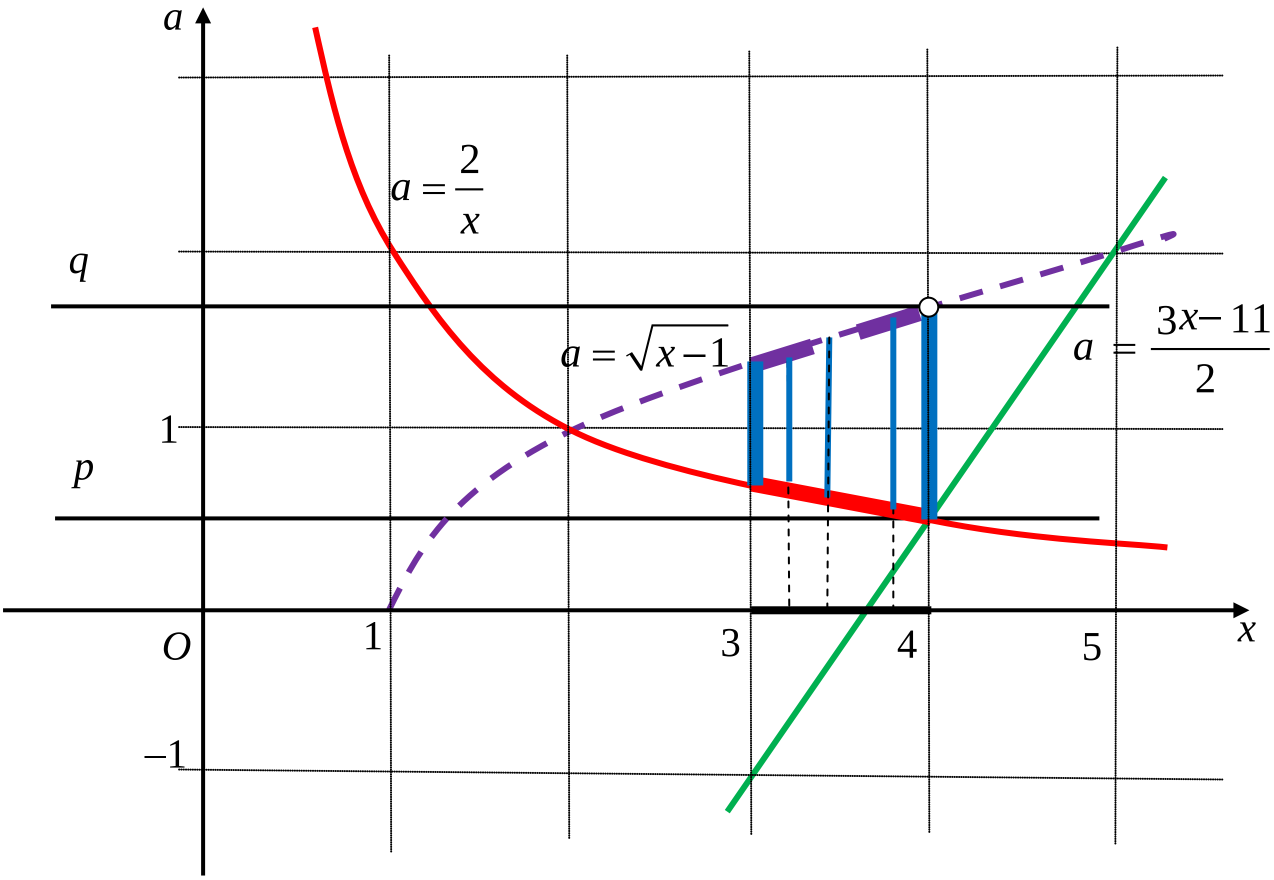
$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке [3; 4].

Решение. Рассмотрим параметр a как функцию аргумента x. Тогда

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ a \geq \dfrac{2}{x}, \\ a < \sqrt{x-1}, \\ a \geq \dfrac{3x-11}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

В координатной плоскости xOa изобразим область, заданную условиями системы (2) и рассмотрим её на отрезке $[3; 4]$.



Видим, что

1) каждое значение x из промежутка [3; 4] является решением системы (1) при определённых значениях параметра a,
2) при каждом значении a из промежутка $\left[p; q\right)$ хотя бы одно значение x, принадлежащее промежутку [3; 4], является решением системы (1). Например, при $a = p$ решением является $x = 4$, при $a = 1$ любое число из промежутка [3; 4] является решением системы (1),
3) при $a = q$ система неравенств (1) не имеет решений на промежутке [3; 4], так как $a < \sqrt{x-1}$.

$$p = \left.\frac{2}{x}\right|_{x=4} = \left.\frac{3x-11}{2}\right|_{x=4} = \frac{1}{2} = 0,5, \qquad q = \left.\sqrt{x-1}\right|_{x=4} = \sqrt{3}.$$

Исходная система неравенств имеет хотя бы одно решение на отрезке [3; 4] при $a \in \left[0,5; \sqrt{3}\right)$.

Ответ: $a \in \left[0,5; \sqrt{3}\right)$.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |a| < 4, \\ x^2 + 16a \le 8x + 48 \end{cases} \tag{1}$$

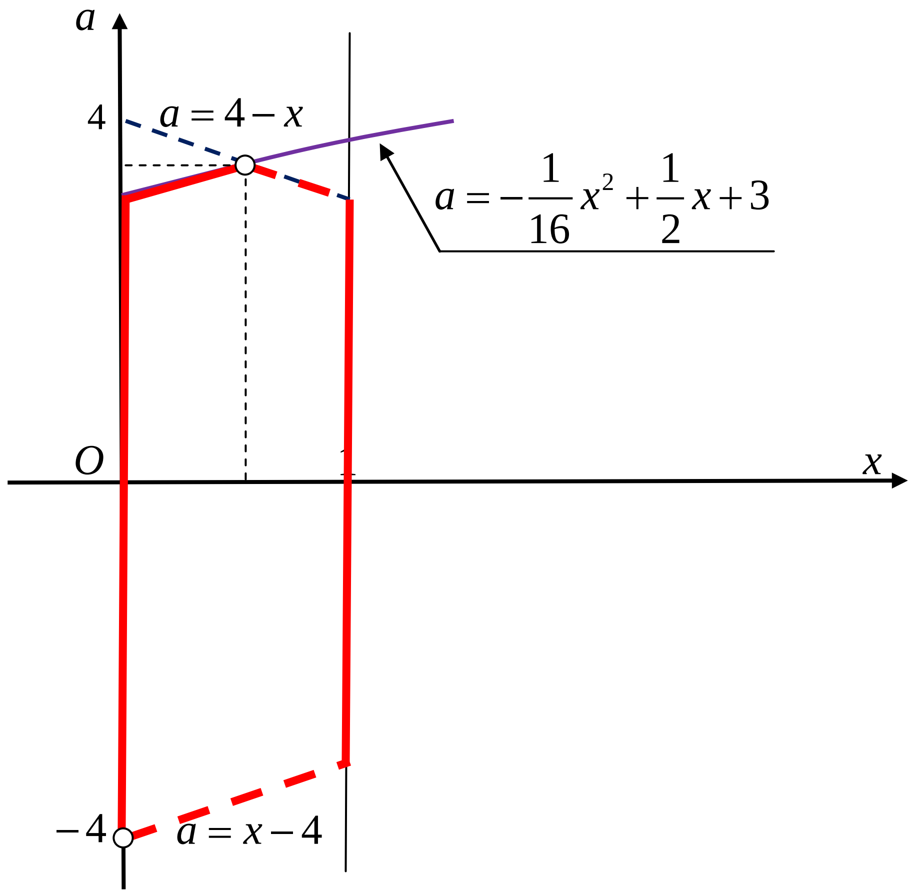
имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0; 1\right]$.

Решение. Рассмотрим параметр a как функцию аргумента x, заданную на отрезке $\left[0; 1\right]$. Тогда

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ |a| < 4 - |x|, \\ a \le -\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ |a| < 4 - x, \\ a \le -\frac{1}{16}\left(x^2 - 8x + 16\right) + 1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ a < 4 - x, \quad \text{если} \quad a > 0, \\ -a < 4 - x, \quad \text{если} \quad a < 0, \\ a \le -\frac{1}{16}\left(x-4\right)^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ a < 4 - x, \quad \text{если} \quad a > 0, \\ a > -4 + x, \quad \text{если} \quad a < 0, \\ a \le -\frac{1}{16}\left(x-4\right)^2 + 4 \end{cases} \tag{2}$$

В координатной плоскости xOa изобразим область, заданную условиями системы (2).



При всех значениях a, больших, чем -4, но меньших, чем ордината точки пересечения графиков функций $a = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$ и $a = 4 - x$, система неравенств (1) имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0; 1]$.

Найдём абсциссу точки пересечения графиков функций $a = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$ и $a = 4 - x$.

$$-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 4 - x \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$D = 24 \cdot 24 - 4 \cdot 16 = 64 \cdot (9 - 1) = 64 \cdot 8 = 64 \cdot 4 \cdot 2,$$

$$\sqrt{D} = 8 \cdot 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2},$$

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm 16\sqrt{2}}{2} = 12 \pm 8\sqrt{2}.$$

Так как $x \in [0; 1]$, то $x = 12 - 8\sqrt{2}$.

$12-8\sqrt{2}$ – абсцисса точки пересечения графиков функций. Найдём ординату точки пересечения.

$$a\Big|_{x=12-8\sqrt{2}}=\left(4-x\right)\Big|_{x=12-8\sqrt{2}}=4-12+8\sqrt{2}=8\sqrt{2}-8.$$

Следовательно, система неравенств (1) имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0;1\right]$ при $-4<a<8\sqrt{2}-8$.

Ответ: $a\in\left(-4;\ 8\sqrt{2}-8\right)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a}\sin x=-\sqrt{x-a}\cos x \qquad (1)$$

имеет ровно один корень на отрезке $\left[0;\pi\right]$.

Решение. Упростим уравнение (1) на отрезке $\left[0;\pi\right]$.

$$\begin{cases}\sqrt{x-a}\sin x=-\sqrt{x-a}\cos x,\\ 0\le x\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-a}\left(\sin x+\cos x\right)=0,\\ 0\le x\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-a}=0,\\ \begin{cases}\sin x+\cos x=0,\\ x-a\ge 0,\end{cases}\end{array}\right.\\ 0\le x\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-a=0,\\ \begin{cases}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}=\dfrac{0}{\sqrt{2}},\\ x\ge a,\end{cases}\end{array}\right.\\ 0\le x\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a,\\ \begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x=0,\\ a\le x,\end{cases}\end{array}\right.\\ 0\le x\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a,\\ \begin{cases}\sin x\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=0,\\ a\le x,\end{cases}\end{array}\right.\\ 0\le x\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a,\\ \begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\\ a\le x,\end{cases}\end{array}\right.\\ 0\le x\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a,\\ \begin{cases}x+\dfrac{\pi}{4}=\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ a\le x,\end{cases}\end{array}\right.\\ 0\le x\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a,\\ \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ a\le x,\end{cases}\end{array}\right.\\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Найдём число вида $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},$, принадлежащее отрезку $[0;\pi]$.

$$0\le -\frac{\pi}{4}+\pi n\le \pi,\quad n\in\mathbb{Z},$$

$$0\le -\frac{1}{4}+n\le 1,\quad n\in\mathbb{Z},$$

$$\frac{1}{4}\le n\le 1\frac{1}{4},\quad n\in\mathbb{Z},$$

$$n=1.$$

Следовательно, число вида $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},$, принадлежащее отрезку $[0;\pi]$, – это $-\frac{\pi}{4}+\pi\cdot 1$, то есть $\frac{3\pi}{4}$.

Имеем:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a,\\ \begin{cases}x=\frac{3\pi}{4},\\ a\le x,\end{cases}\end{array}\right.\\ 0\le x\le \pi\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a,\\ \begin{cases}x=\frac{3\pi}{4},\\ a\le \frac{3\pi}{4},\end{cases}\end{array}\right.\\ 0\le x\le \pi.\end{cases}\qquad (2)$$

Из (2) следует, что исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;\pi]$, если

- a и $\frac{3\pi}{4}$ совпадают и все условия (2) выполняются

или

- единственным корнем на отрезке $[0;\pi]$ является a, а $\frac{3\pi}{4}$ не является корнем исходного уравнения (соответствующее условие из (2) не выполняется),

или

- единственным корнем на отрезке $[0;\pi]$ является $\frac{3\pi}{4}$, а корень исходного уравнения a не принадлежит отрезку $[0;\pi]$.

Тогда

1) $\begin{cases} a=\dfrac{3\pi}{4}, \\ x=\dfrac{3\pi}{4}, \\ a\le\dfrac{3\pi}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3\pi}{4}, \\ x=\dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=a, \\ 0\le a\le\pi, \\ a>\dfrac{3\pi}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a, \\ \dfrac{3\pi}{4}<a\le\pi. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=\dfrac{3\pi}{4}, \\ a\le\dfrac{3\pi}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} a<0, \\ a>\pi \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3\pi}{4}, \\ a<0. \end{cases}$

Итак, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;\pi]$ при $a\in\left\{\dfrac{3\pi}{4}\right\}\cup\left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]\cup(-\infty;0)$, то есть при $a\in(-\infty;0)\cup\left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]$.

Ответ: $a\in(-\infty;0)\cup\left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]$.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x-2}\ln(x-a)=\sqrt{3x-2}\ln(2x+a) \qquad (1)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Решение. Упростим уравнение (1).

$$\sqrt{3x-2}\ln(x-a)=\sqrt{3x-2}\ln(2x+a) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3x-2}\left(\ln(x-a)-\ln(2x+a)\right)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{3x-2}=0,\\ x-a>0,\\ 2x+a>0,\end{cases}\\ \begin{cases}\ln(x-a)-\ln(2x+a)=0,\\ 3x-2\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-2=0,\\ a<x,\\ a>-2x,\end{cases}\\ \begin{cases}\ln(x-a)=\ln(2x+a),\\ 3x\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\ a<\dfrac{2}{3},\\ a>-\dfrac{4}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x-a>0,\\ 2x+a>0,\\ x-a=2x+a,\\ x\ge\dfrac{2}{3}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\ -\dfrac{4}{3}<a<\dfrac{2}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2a,\\ a<x,\\ a>-2x,\\ x\ge\dfrac{2}{3}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\ -\dfrac{4}{3}<a<\dfrac{2}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2a,\\ a<-2a,\\ a>4a,\\ -2a\ge\dfrac{2}{3}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\ -\dfrac{4}{3}<a<\dfrac{2}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2a,\\ 3a<0,\\ a\le-\dfrac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\ -\dfrac{4}{3}<a<\dfrac{2}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2a,\\ a\le-\dfrac{1}{3}.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (2)$$

Заметим, что $\dfrac{2}{3}\in[0;1]$, но является корнем уравнения (1) только при выполнении условия $-\dfrac{4}{3}<a<\dfrac{2}{3}$.

Следовательно, уравнение (1) имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$ только тогда, когда

- оба полученных значения x являются корнями уравнения (1), (это происходит, если выполняются все условия системы (2)) и совпадают

или

- корнем уравнения (1) является $\frac{2}{3}$, а $-2a$ или не является корнем уравнения (1) , или является корнем, но не принадлежит отрезку $[0;1]$,

или

- корнем уравнения (1) на отрезке $[0;1]$ является $-2a$, а $\frac{2}{3}$ не является

корнем уравнения (1).

Имеем:

1)

$$\begin{cases} -2a = \frac{2}{3}, \\ -\frac{4}{3} < a < \frac{2}{3}, \\ a \le -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3}, \\ -\frac{4}{3} < a < \frac{2}{3}, \\ a \le -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{3}.$$

2)

$$\begin{cases} -\frac{4}{3} < a < \frac{2}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} a > -\frac{1}{3}, \\ \begin{cases} a \le -\frac{1}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} -2a < 0, \\ -2a > 1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} < a < \frac{2}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} a > -\frac{1}{3}, \\ \begin{cases} a \le -\frac{1}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} a > 0, \\ a < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} < a < \frac{2}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} a > -\frac{1}{3}, \\ \begin{cases} a \le -\frac{1}{3}, \\ a < -\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} < a < \frac{2}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} a > -\frac{1}{3}, \\ a < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}, \\ -\frac{4}{3} < a < -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

3)

$$\begin{cases} a \le -\dfrac{1}{3}, \\ 0 \le -2a \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} a \le -\dfrac{4}{3}, \\ a \ge \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \le -\dfrac{1}{3}, \\ -\dfrac{1}{2} \le a \le 0, \\ \left[\begin{array}{l} a \le -\dfrac{4}{3}, \\ a \ge \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \qquad \varnothing$$

Итак, $a \in \left\{-\dfrac{1}{3}\right\} \cup \left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{1}{2}\right)$, то есть $a \in \left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}} = 0 \tag{1}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[4; 8]$.

Решение. Упростим уравнение (1).

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 10x - x^2 - a^2 > 0, \\ (x-a-7)(x+a-2) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = a+7, \\ 10(a+7) - (a+7)^2 - a^2 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2-a, \\ 10(2-a) - (2-a)^2 - a^2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = a+7, \\ 10a + 70 - a^2 - 14a - 49 - a^2 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2-a, \\ 20 - 10a - 4 + 4a - a^2 - a^2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = a+7, \\ 2a^2 + 4a - 21 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2-a, \\ 2a^2 + 6a - 16 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \tag{2}$$

Решим неравенства системы (2).

$$2a^2+4a-21<0.$$

$$\left|\begin{array}{l} 2a^2+4a-21=0, \\ D=16+4\cdot 2\cdot 21=4\cdot\left(4+42\right)=4\cdot 46, \\ a_{1,2}=\dfrac{-4\pm 2\sqrt{46}}{4}=\dfrac{-2\pm\sqrt{46}}{2}. \end{array}\right.$$

$$2a^2+4a-21<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-2-\sqrt{46}}{2}<a<\frac{-2+\sqrt{46}}{2}.$$

$$2a^2+6a-16<0 \quad\Leftrightarrow\quad a^2+3a-8<0.$$

$$\left|\begin{array}{l} a^2+3a-8=0, \\ D=9+32=41, \\ a_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{2}. \end{array}\right.$$

$$a^2+3a-8<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<\frac{-3+\sqrt{41}}{2}.$$

При составлении дальнейших высказываний учтём, что

$$\frac{-3-\sqrt{41}}{2}\approx -4,7, \qquad \frac{-2-\sqrt{46}}{2}\approx -4,4, \qquad \frac{-3+\sqrt{41}}{2}\approx 1,7, \qquad \frac{-2+\sqrt{46}}{2}\approx 2,4,$$

то есть $\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}<\dfrac{-2-\sqrt{46}}{2}<\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}<\dfrac{-2+\sqrt{46}}{2}$.

Тогда

$$(1) \quad\Leftrightarrow\quad (2) \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=a+7, \\ \dfrac{-2-\sqrt{46}}{2}<a<\dfrac{-2+\sqrt{46}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=2-a, \\ \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}. \end{cases} \end{array}\right. \tag{3}$$

Уравнение (1) имеет ровно один корень на отрезке $[4;8]$ тогда и только тогда, когда

- $a+7$ и $2-a$ являются корнями уравнения (1) и совпадают,
- $a+7$ – единственный корень на отрезке $[4;8]$, а значение $2-a$ или не является корнем уравнения (1), или является корнем, но не принадлежит отрезку $[4;8]$,
- $2-a$ – единственный корень на отрезке $[4;8]$, а значение $a+7$ или не является корнем уравнения (1), или является корнем, но не принадлежит отрезку $[4;8]$.

Имеем:

1)

$$\begin{cases} a+7=2-a, \\ \dfrac{-2-\sqrt{46}}{2}<a<\dfrac{-2+\sqrt{46}}{2}, \\ \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad a=-2,5$$

2) Рассмотрим второй случай по действиям:

а) $a+7$ является корнем уравнения (1) и принадлежит отрезку $[4;8]$:

$$\begin{cases} 4\le a+7\le 8, \\ \dfrac{-2-\sqrt{46}}{2}<a<\dfrac{-2+\sqrt{46}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\le a\le 1, \\ \dfrac{-2-\sqrt{46}}{2}<a<\dfrac{-2+\sqrt{46}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad -3\le a\le 1.$$

б) $2-a$ или не является корнем уравнения (1), или является корнем, но не принадлежит отрезку $[4;8]$:

$$\left[\begin{array}{l} a\le \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}, \\ a\ge \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}, \\ \begin{cases} \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} 2-a<4, \\ 2-a>8 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\le \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}, \\ a\ge \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}, \\ \begin{cases} \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} a>-2, \\ a<-6 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}, \\ a \ge \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}, \\ -2 < a < \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}, \\ a > -2 \end{array}\right.$$

в) оба условия выполняются одновременно:

$$\begin{cases} -3 \le a \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} a \le \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}, \\ a > -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad -2 < a \le 1.$$

3) Рассмотрим третий случай по действиям.

а) $2-a$ является корнем уравнения (1) и принадлежит отрезку $[4;8]$:

$$\begin{cases} 4 \le 2-a \le 8, \\ \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2} < a < \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \le a \le -2, \\ \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2} < a < \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2} < a \le -2.$$

б) $a+7$ или не является корнем уравнения (1), или является корнем, но не принадлежит отрезку $[4;8]$:

$$\left[\begin{array}{l} a \le \dfrac{-2-\sqrt{46}}{2}, \\ a \ge \dfrac{-2+\sqrt{46}}{2}, \\ \begin{cases} \dfrac{-2-\sqrt{46}}{2} < a < \dfrac{-2+\sqrt{46}}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} a+7 < 4, \\ a+7 > 8 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le \dfrac{-2-\sqrt{46}}{2}, \\ a \ge \dfrac{-2+\sqrt{46}}{2}, \\ \begin{cases} \dfrac{-2-\sqrt{46}}{2} < a < \dfrac{-2+\sqrt{46}}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} a < -3, \\ a > 1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le \dfrac{-2-\sqrt{46}}{2}, \\ a \ge \dfrac{-2+\sqrt{46}}{2}, \\ \dfrac{-2-\sqrt{46}}{2} < a < -3, \\ 1 < a < \dfrac{-2+\sqrt{46}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -3, \\ a > 1 \end{array}\right.$$

в) оба условия выполняются одновременно:

$$\begin{cases} \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2} < a \le -2, \\ \left[\begin{array}{l} a < -3, \\ a > 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{-3-\sqrt{41}}{2} < a < -3.$$

Итак, $a \in \left(\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}; -3\right) \cup \left\{-\dfrac{5}{2}\right\} \cup (-2; 1]$.

Ответ: $a \in \left(\dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}; -3\right) \cup \left\{-\dfrac{5}{2}\right\} \cup (-2; 1]$.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3-5x} \cdot \ln\left(4x^2 - a^2\right) = \sqrt{3-5x} \cdot \ln(2x+a) \tag{1}$$

имеет ровно один корень.

Решение. $\sqrt{3-5x} \cdot \ln\left(4x^2 - a^2\right) = \sqrt{3-5x} \cdot \ln(2x+a) \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3-5x} \cdot \left(\ln\left(4x^2 - a^2\right) - \ln(2x+a)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-5x \ge 0, \\ 2x+a > 0, \\ 4x^2 - a^2 > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{3-5x} = 0, \\ \ln\left(4x^2-a^2\right) - \ln(2x+a) = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3}{5}, \\ 2x+a > 0, \\ (2x-a)(2x+a) > 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3-5x = 0, \\ \ln\left(4x^2-a^2\right) = \ln(2x+a) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3}{5}, \\ 2x + a > 0, \\ 2x - a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3 - 5x = 0, \\ 4x^2 - a^2 = 2x + a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3}{5}, \\ 2x + a > 0, \\ 2x - a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3 - 5x = 0, \\ (2x + a)(2x - a) - (2x + a) = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3}{5}, \\ 2x + a > 0, \\ 2x - a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3 - 5x = 0, \\ (2x + a)(2x - a - 1) = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3}{5}, \\ 2x + a > 0, \\ 2x - a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3 - 5x = 0, \\ 2x - a - 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3}{5}, \\ a > -2x, \\ a < 2x, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{5}, \\ x = \dfrac{a+1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{3}{5}, \\ a > -2x, \\ a < 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{a+1}{2}, \\ x \le \dfrac{3}{5}, \\ a > -2x, \\ a < 2x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{3}{5}, \\ a > -\dfrac{6}{5}, \\ a < \dfrac{6}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{a+1}{2}, \\ \dfrac{a+1}{2} \le \dfrac{3}{5}, \\ a > -a - 1, \\ a < a + 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{3}{5}, \\ -\dfrac{6}{5} < a < \dfrac{6}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{a+1}{2}, \\ a \le \dfrac{1}{5}, \\ a > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{3}{5}, \\ -\dfrac{6}{5} < a < \dfrac{6}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{a+1}{2}, \\ -\dfrac{1}{2} < a \le \dfrac{1}{5}. \end{cases} \end{array}\right.$$

$\dfrac{a+1}{2} = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{5}$. Видим, что только при $a = \dfrac{1}{5}$ полученные решения совпадают, то есть уравнение (1) имеет только один корень $\dfrac{3}{5}$, а при каждом значении

a из интервала $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{5}\right)$ уравнение (1) имеет два различных корня. Следовательно, исходное уравнение имеет ровно один корень только при $a\in\left(-\frac{6}{5};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{5};\frac{6}{5}\right)$.

Ответ: $a\in\left(-\frac{6}{5};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{5};\frac{6}{5}\right)$.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x\sqrt{x-a}=\sqrt{6x^2-(6a+3)x+3a} \qquad (1)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Решение.

$$6x^2-(6a+3)x+3a=0,$$

$$D=(6a+3)^2-72a=36a^2+36a+9-72a=36a^2-36a+9=(6a-3)^2,$$

$$x_{1,2}=\frac{6a+3\pm(6a-3)}{12},$$

$$x_1=\frac{6a+3-(6a-3)}{12}=\frac{1}{2}, \qquad x_2=\frac{6a+3+(6a-3)}{12}=a.$$

Следовательно,

$$6x^2-(6a+3)x+3a=6\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-a)=(6x-3)(x-a).$$

Тогда

$$x\sqrt{x-a}=\sqrt{6x^2-(6a+3)x+3a} \quad\Leftrightarrow\quad x\sqrt{x-a}=\sqrt{(6x-3)(x-a)} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x-a\ge 0,\\ (6x-3)(x-a)\ge 0,\\ x\sqrt{x-a}=\sqrt{(6x-3)(x-a)} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a=0,\\ x\cdot 0=0, \end{cases}\\ \begin{cases} x-a>0,\\ 6x-3\ge 0,\\ x\sqrt{x-a}-\sqrt{6x-3}\sqrt{x-a}=0 \end{cases} \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ \begin{cases} x>a, \\ x\ge \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{x-a}\left(x-\sqrt{6x-3}\right)=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2}, \\ x=\sqrt{6x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2}, \\ x^2=6x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2}, \\ x^2-6x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2}, \\ x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{24}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2}, \\ x_{1,2}=3\pm\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3-\sqrt{6}, \\ x=3+\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a, \\ \begin{cases} x>a, \\ \left[\begin{array}{l} x=3-\sqrt{6} \\ x=3+\sqrt{6}. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a, \\ \begin{cases} x=3-\sqrt{6}, \\ x>a, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3+\sqrt{6}, \\ x>a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a, \\ \begin{cases} x=3-\sqrt{6}, \\ a<3-\sqrt{6}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3+\sqrt{6}, \\ a<3+\sqrt{6}. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (2)$$

$3-\sqrt{6}\in[0;1]$, $3+\sqrt{6}\notin[0;1]$, поэтому проведём исследование совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x=a, \\ \begin{cases} x=3-\sqrt{6}, \\ a\le 3-\sqrt{6} \end{cases} \end{array}\right. \qquad (3)$$

Исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$, если

1) a и $3-\sqrt{6}$ совпадают и условие (3) выполняется,

2) единственным корнем на отрезке $[0;1]$ является a, а $3-\sqrt{6}$ не является корнем уравнения (1),
3) единственным корнем на отрезке $[0;1]$ является $3-\sqrt{6}$, а a является корнем, но не принадлежит отрезку $[0;1]$,

Имеем:

1)
$$\begin{cases} a=3-\sqrt{6}, \\ a\le 3-\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \quad a=3-\sqrt{6}.$$

2)
$$\begin{cases} 0\le a\le 1, \\ a>3-\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3-\sqrt{6}<a\le 1.$$

3)
$$\begin{cases} a\le 3-\sqrt{6}, \\ \left[\begin{array}{l} a<0, \\ a>1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad a<0.$$

Итак, $a\in\left\{3-\sqrt{6}\right\}\cup\left(3-\sqrt{6};1\right]\cup(-\infty;0)$, т. е. $a\in(-\infty;0)\cup\left[3-\sqrt{6};1\right]$.

Ответ: $a\in(-\infty;0)\cup\left[3-\sqrt{6};1\right]$

8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\operatorname{tg}(\pi x)\cdot\ln(x+a)=\ln(x+a) \tag{1}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Решение.

$$\operatorname{tg}(\pi x)\cdot\ln(x+a)=\ln(x+a) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x+a)\left(\operatorname{tg}(\pi x)-1\right)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+a>0, \\ \cos(\pi x)\ne 0, \\ \left[\begin{array}{l} \ln(x+a)=0, \\ \operatorname{tg}(\pi x)=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \ln(x+a)=0, \\ \cos(\pi x)\ne 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x)=1, \\ a>-x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+a=1, \\ \cos(\pi x)\ne 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \pi x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}, \\ a>-x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 - a, \\ \cos(\pi x) \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} + n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ a > -x \end{cases} \end{array} \right. \tag{2}$$

Число вида $\dfrac{1}{4} + n$, где $n \in \mathbb{Z}$, принадлежит отрезку $[0;1]$, если

$$\begin{aligned} &0 \le \frac{1}{4} + n \le 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ &-\frac{1}{4} \le n \le \frac{3}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ &n = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, отрезку $[0;1]$ принадлежит только $\dfrac{1}{4}$. Тогда продолжим исследование совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 - a, \\ \cos(\pi x) \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{4}, \\ a > -\dfrac{1}{4}. \end{cases} \end{array} \right. \tag{3}$$

Уравнение (1) имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$, если

1) $1 - a$ и $\dfrac{1}{4}$ совпадают и все условия (3) выполняются,
2) $1 - a$ является единственным корнем уравнения (1) на отрезке $[0;1]$, а $\dfrac{1}{4}$ не является корнем уравнения (1),
3) $\dfrac{1}{4}$ является корнем уравнения (1) на отрезке $[0;1]$, а $1 - a$ или не является корнем уравнения (1) или является корнем, но не принадлежит отрезку $[0;1]$.

Имеем:

1)

$$\begin{cases} 1-a=\dfrac{1}{4}, \\ \cos\left(\pi\cdot\dfrac{1}{4}\right)\neq 0, \\ a>-\dfrac{1}{4} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{3}{4}.$$

2)

$$\begin{cases} 0\le a\le 1, \\ \cos\left(\pi\left(1-a\right)\right)\neq 0, \\ a\le -\dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad\qquad \varnothing$$

3)

$$\begin{cases} a>-\dfrac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} \cos\left(\pi\left(1-a\right)\right)=0, \\ \begin{cases} \cos\left(\pi\left(1-a\right)\right)\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 1-a<0, \\ 1-a>1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-\dfrac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} \pi\left(1-a\right)=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}, \\ \begin{cases} \pi\left(1-a\right)\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} a>1, \\ a<0 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>-\dfrac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} 1-a=\dfrac{1}{2}+k, \quad k\in\mathbb{Z}, \\ \begin{cases} 1-a\neq\dfrac{1}{2}+m, \quad m\in\mathbb{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} a>1, \\ a<0 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-\dfrac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2}-k, \quad k\in\mathbb{Z}, \\ \begin{cases} a\neq\dfrac{1}{2}-m, \quad m\in\mathbb{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} a>1, \\ a<0 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > -\dfrac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2}, \\ a > 1, \\ a < 0 \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{4} < a < 0, \\ a = \dfrac{1}{2}, \\ a > 1 \end{array}\right.$$

Итак, $a \in \left(-\dfrac{1}{4};\, 0\right) \cup \left\{\dfrac{1}{2};\, \dfrac{3}{4}\right\} \cup \left(1;\, +\infty\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\dfrac{1}{4};\, 0\right) \cup \left\{\dfrac{1}{2};\, \dfrac{3}{4}\right\} \cup \left(1;\, +\infty\right)$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y - ax = a + 5, \\ xy^2 - x^2 y - 2xy + 4x - 4y + 8 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно два решения.

Решение. 1) $xy^2 - x^2 y - 2xy + 4x - 4y + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \left(xy^2 - x^2 y\right) + \left(4x - 4y\right) + \left(-2xy + 8\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad xy\left(y - x\right) - 4\left(y - x\right) - 2\left(xy - 4\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(y - x\right)\left(xy - 4\right) - 2\left(xy - 4\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \left(xy - 4\right)\left(y - x - 2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} xy - 4 = 0, \\ y - x - 2 = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{4}{x}, \\ y = x + 2. \end{array}\right.$$

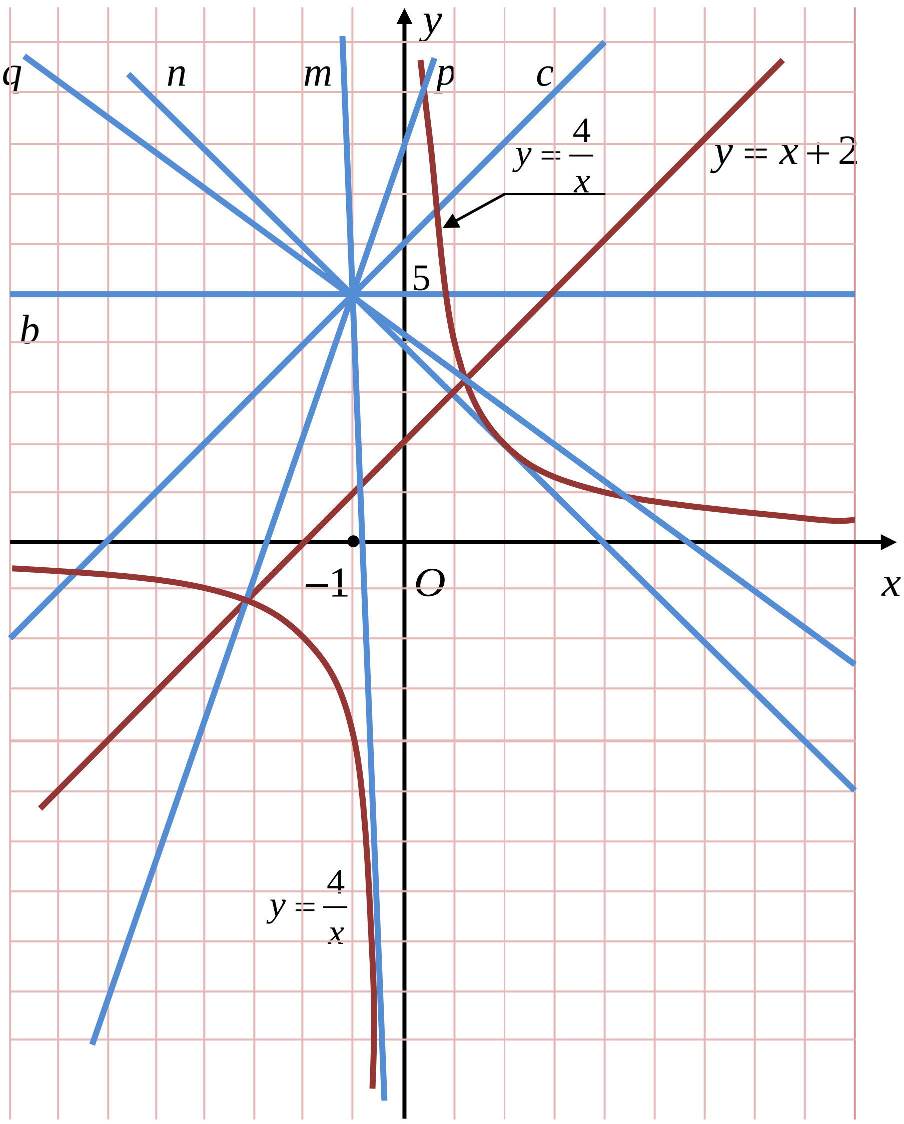
2) $y - ax = a + 5 \quad \Leftrightarrow \quad y = ax + a + 5 \quad \Leftrightarrow \quad y = a\left(x + 1\right) + 5.$

Уравнение определяет множество прямых, проходящих через точку $\left(-1;\, 5\right)$.

3) Изобразим графики уравнений в одной системе координат, чтобы выполнялось условие задачи (графики изображены на следующей странице).

4) Прямая b, имеющая уравнение $y = ax + a + 5$, параллельна оси Ox. Тогда $a = 0$.

5) Прямые m и n, имеющие уравнение $y = ax + a + 5$, – касательные к гиперболе $y = \dfrac{4}{x}$. Тогда $\left.\begin{array}{l} k_{\text{кас.}} = y'\left(x_0\right) \\ k_{\text{кас.}} = a \end{array}\right| \Rightarrow y'\left(x_0\right) = a.$



$$y'(x_0) = -\frac{4}{x_0^2}, \qquad -\frac{4}{x_0^2} = a, \qquad x_0^2 = -\frac{4}{a}, \qquad x_0 = \pm\sqrt{-\frac{4}{a}}, \qquad x_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{-a}}.$$

5.1) $x_0 = -\frac{2}{\sqrt{-a}}$ – абсцисса точки касания.

Из условия равенства ординат точки касания получаем

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = 4 : \left(-\frac{2}{\sqrt{-a}}\right) = -2\sqrt{-a}, \\ y_0 = a \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{-a}}\right) + a + 5 = (-a) \cdot \frac{2}{\sqrt{-a}} + a + 5 = \left(\sqrt{-a}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{-a}} + a + 5 = 2\sqrt{-a} + a + 5 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{-a} + a + 5 = -2\sqrt{-a},$$

$$-a - 4\sqrt{-a} - 5 = 0,$$

$$\left(\sqrt{-a}\right)^2-4\sqrt{-a}-5=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{-a}=5,\\ \sqrt{-a}=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \sqrt{-a}=5 \quad \Leftrightarrow \quad -a=25 \quad \Leftrightarrow \quad a=-25.$$

При $a=-25$ прямая $y-ax=a+5$ касается ветви гиперболы, расположенной в третьей координатной четверти, и пересекает прямую $y=x+2$, то есть имеет две общие точки с графиком второго уравнения системы (1).

5.2) $x_0=\dfrac{2}{\sqrt{-a}}$ – абсцисса точки касания.

Из условия равенства ординат точки касания получаем

$$\left.\begin{array}{l} y_0=4:\dfrac{2}{\sqrt{-a}}=2\sqrt{-a},\\ y_0=a\cdot\dfrac{2}{\sqrt{-a}}+a+5=-(-a)\cdot\dfrac{2}{\sqrt{-a}}+a+5=-\left(\sqrt{-a}\right)^2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{-a}}+a+5=-2\sqrt{-a}+a+5\end{array}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -2\sqrt{-a}+a+5=2\sqrt{-a},$$

$$-a+4\sqrt{-a}-5=0,$$

$$\left(\sqrt{-a}\right)^2+4\sqrt{-a}-5=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{-a}=-5,\\ \sqrt{-a}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \sqrt{-a}=1 \quad \Leftrightarrow \quad -a=1 \quad \Leftrightarrow \quad a=-1.$$

При $a=-1$ прямая $y-ax=a+5$ касается ветви гиперболы, расположенной в первой координатной четверти, и пересекает прямую $y=x+2$, то есть имеет две общие точки с графиком второго уравнения системы (1).

6) Прямые p и q проходят через одну из точек пересечения линий $y=\dfrac{4}{x}$ и $y=x+2$.

Найдём абсциссы точек пересечения:

$$\frac{4}{x}=x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x+2-\frac{4}{x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+2x-4}{x}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x^2+2x-4=0,\\ x\neq 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2x-4=0.$$

$D = 4 + 16 = 20 = 4 \cdot 5$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}.$$

6.1) $-1-\sqrt{5}$ – абсцисса точки пересечения прямой $y = x + 2$ с ветвью гиперболы, расположенной в третьей четверти.

Ордината точки пересечения: $y = \left(-1-\sqrt{5}\right) + 2 = 1-\sqrt{5}.$

Таким образом, прямая p, имеющая уравнение $y = ax + a + 5$, проходит через точку $\left(-1-\sqrt{5};\ 1-\sqrt{5}\right)$. Тогда

$$\left.\begin{cases} y = ax + a + 5, \\ x = -1-\sqrt{5}, \\ y = 1-\sqrt{5} \end{cases}\right| \quad \Rightarrow \quad a\left(-1-\sqrt{5}\right) + a + 5 = 1-\sqrt{5},$$

$-a - a\sqrt{5} + a + 5 = 1-\sqrt{5},$

$a\sqrt{5} = 4 + \sqrt{5},$

$$a = \frac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 + 0{,}8\sqrt{5}.$$

6.2) $-1+\sqrt{5}$ – абсцисса точки пересечения прямой $y = x + 2$ с ветвью гиперболы, расположенной в первой четверти.

Ордината точки пересечения: $y = \left(-1+\sqrt{5}\right) + 2 = 1+\sqrt{5}.$

Таким образом, прямая q, имеющая уравнение $y = ax + a + 5$, проходит через точку $\left(-1+\sqrt{5};\ 1+\sqrt{5}\right)$. Тогда

$$\left.\begin{cases} y = ax + a + 5, \\ x = -1+\sqrt{5}, \\ y = 1+\sqrt{5} \end{cases}\right| \quad \Rightarrow \quad a\left(-1+\sqrt{5}\right) + a + 5 = 1+\sqrt{5},$$

$-a + a\sqrt{5} + a + 5 = 1+\sqrt{5},$

$a\sqrt{5} = -4 + \sqrt{5},$

$$a = \frac{-4+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 - 0{,}8\sqrt{5}.$$

7) Прямая c, имеющая уравнение $y = ax + a + 5$, проходит параллельно прямой $y = x + 2$. Тогда совпадают угловые коэффициенты прямых. Следовательно, $a = 1$.

Итак, $a \in \left\{-25;\ -1;\ 1-0,8\sqrt{5};\ 0;\ 1;\ 1+0,8\sqrt{5}\right\}$.

Ответ: $a \in \left\{-25;\ -1;\ 1-0,8\sqrt{5};\ 0;\ 1;\ 1+0,8\sqrt{5}\right\}$.