

Интенсив «Решение заданий
повышенного и высокого уровня сложности»



**Решение
тригонометрических
уравнений.
Отбор корней**

Панина Н. А.
учитель математики
МБОУ СШ № 33,
г. Смоленск

2025-2026 учебный год



На занятии рассмотрим задания

Пример 1 (проект демоверсии ЕГЭ-2026)

а) Решите уравнение $2 \sin^3 x = \sqrt{2} \cos^2 x + 2 \sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Рассмотрим обязательные элементы обоснования решения в процессе отбора корней (задание б), выполняя отбор тремя способами:

- по окружности,
- с помощью неравенств (методом оценки параметра),
- методом перебора.

Пример 2 (проект демоверсии ЕГЭ-2026)

а) Решите уравнение $2 + 2 \cos(\pi - 2x) + \sqrt{8} \sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12} \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Пример 3. (alexlarin.net [Тренировочный вариант №508](#) ЕГЭ - 2026)

а) Решите уравнение $\frac{\left(81^{|\cos x|}\right)^{\sin x} - 9^{\sqrt{3} \sin x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

В некоторых случаях решения будут прерываться комментариями автора. Они выделены курсивом фиолетовым цветом. В развёрнутом ответе, конечно же, эти фрагменты прописывать не нужно.



Пример 1 (проект демоверсии ЕГЭ-2026)

а) Решите уравнение $2\sin^3 x = \sqrt{2}\cos^2 x + 2\sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение: а) $2\sin^3 x = \sqrt{2}\cos^2 x + 2\sin x$;

$$2\sin^3 x = \sqrt{2}(1 - \sin^2 x) + 2\sin x;$$

$$2\sin^3 x = \sqrt{2} - \sqrt{2}\sin^2 x + 2\sin x;$$

$$2\sin^3 x + \sqrt{2}\sin^2 x - 2\sin x - \sqrt{2} = 0;$$

$$(2\sin^3 x + \sqrt{2}\sin^2 x) + (-2\sin x - \sqrt{2}) = 0;$$

$$\sin^2 x(2\sin x + \sqrt{2}) - (2\sin x + \sqrt{2}) = 0;$$

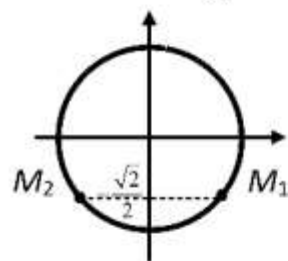
$$(2\sin x + \sqrt{2})(\sin^2 x - 1) = 0;$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{или} \quad \sin^2 x = 1.$$

Заметим, что наряду с тригонометрическими преобразованиями применили алгебраический приём разложения левой части уравнения на множители, используя для этого метод группировки. Так как в правой части 0, то исходное уравнение распалось на два более простых тригонометрических уравнения. Продолжим решение, оформляя его «в два столбика».

К сожалению, одна из наиболее частых ошибок на ЕГЭ при выполнении задания 13 – неправильное составление формулы решений простейшего тригонометрического уравнения. Эффективный способ избежать ошибки – проиллюстрировать решение простейшего уравнения на окружности. Это позволит правильно указать главный угол и не допустить ошибку в периодичности решений.

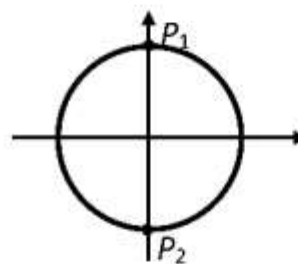
$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

или

$$\sin x = \pm 1$$



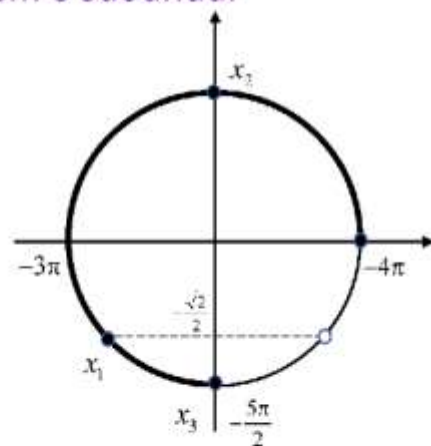
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

6) Отбор по окружности

Решение признаётся обоснованным, если

- 1) концы заданного промежутка, на котором должны находиться корни, **ИЗОБРАЖЕНЫ** на окружности и **ПОДПИСАНЫ**,
- 2) дуга, на которой должны находиться корни, **ВЫДЕЛЕНА**,
- 3) * концы горизонтального диаметра можно подписать для более быстрого расчёта корней,
- 4) на окружность нанесены **ВСЕ** точки, иллюстрирующие множество решений исходного уравнения, и проведено графическое исследование принадлежности изображения выделенной дуге (**УДАЛЕНЫ** точки, не принадлежащие выделенной дуге, на окружности **ВЫДЕЛЕНЫ** точки и **ПОДПИСАНЫ** корни, принадлежащие промежутку),
- 5) рядом с чертежом показано, как выполнен **РАСЧЁТ ИСКОМЫХ КОРНЕЙ**,
- 6) указан ответ в задании.

6) $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$



$$x_1 = -3\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{11\pi}{4}$$

$$x_2 = -4\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{2}$$

$$x_3 = -\frac{5\pi}{2}$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$ б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}.$

6) Отбор корней с помощью неравенств (методом оценки параметра)

Отбор выполняется по формулам решений.

По каждой формуле

- нужно рассчитать значения параметра, при которых решение оказывается на заданном промежутке,

- а затем при каждом найденном значении параметра нужно вычислить корень исходного уравнения. Это искомый корень (он принадлежит промежутку).

Математически это самый строгий метод отбора.

Практически в нём два недостатка:

1) он затратный по времени (в выполняемом задании потребовал в 2-3 раза больше времени, чем отбор по тригонометрической окружности, так как отбор выполнялся по трём формулам. У экспериментальной группы время отбора по окружности составило от 2 до 3 минут, время отбора по неравенствам составило от 6 до 8 минут),

2) если в расчётах допущена вычислительная ошибка, то даже при наличии правильного ответа за отбор корней участник экзамена получает 0 баллов.

Совет: *затраты времени существенно уменьшаются, если работу выполнять не с дробями, а с целыми числами.*

$$6) \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$-4\pi \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq -\frac{5\pi}{2},$$

$$-16\pi \leq -\pi + 8\pi k \leq -10\pi,$$

$$-15\pi \leq 8\pi k \leq -9\pi,$$

$$-\frac{15\pi}{8\pi} \leq k \leq -\frac{9\pi}{8\pi},$$

$$-1\frac{7}{8} \leq k \leq -1\frac{1}{8},$$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то

решений нет.

$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$-4\pi \leq -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq -\frac{5\pi}{2},$$

$$-16\pi \leq -3\pi + 8\pi n \leq -10\pi,$$

$$-13\pi \leq 8\pi n \leq -7\pi,$$

$$-\frac{13\pi}{8\pi} \leq n \leq -\frac{7\pi}{8\pi},$$

$$-1\frac{5}{8} \leq n \leq -\frac{7}{8},$$

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то $n = -1$.

$$\text{Тогда } x = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{11\pi}{4}.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$-4\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi m \leq -\frac{5\pi}{2},$$

$$-8\pi \leq \pi + 2\pi m \leq -5\pi,$$

$$-9\pi \leq 2\pi m \leq -6\pi,$$

$$-\frac{9\pi}{2\pi} \leq m \leq -\frac{6\pi}{2\pi},$$

$$-4\frac{1}{2} \leq m \leq -3,$$

Так как $m \in \mathbb{Z}$, то $m = -4; -3$.

$$\text{Тогда } x = \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{5\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } -\frac{7\pi}{2}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}.$$

6) Отбор корней перебором

Решение признаётся обоснованным только тогда, когда оно позволяет назвать все корни, принадлежащие заданному промежутку, и доказать, что других корней на промежутке нет.

Отбор осуществляется по формулам. Каждую формулу рассматриваем как функцию: x – функция, k (или n , m) – аргумент. Функция является дискретной, линейной, возрастающей.

Работая этим методом, мысленно представляем числовую прямую x и заданный промежуток на ней. Затем по каждой формуле

1) нужно указать такое значение k (или n , m) и соответствующее ему значение x , чтобы корень располагался левее заданного промежутка (**«недолёт»**).

Так как уменьшение значений k (или n , m) уменьшит корень, то он будет ещё левее промежутка, а, следовательно, не является искомым.

2) нужно увеличить значение k (или n , m) на 1 и рассчитать соответствующее ему значение x . Если оно располагается на заданном промежутке, то это один из искоемых корней (**«попадание в промежуток»**).

Шаг нужно повторять до тех пор, пока корень не окажется правее промежутка,

3) корень, который оказался правее промежутка, уже не является искомым (**«перелёт»**). Дальнейшее увеличение k (или n , m) на 1 бессмысленно (получающиеся корни и подавно будут правее промежутка (по свойству транзитивности)).

$$6) \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$$

$$1) x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Если } k = -2, \text{ то } x = -\frac{\pi}{4} - 4\pi < -4\pi,$$

$$\text{если } k = -1, \text{ то } x = -\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{9\pi}{4} > -\frac{5\pi}{2}.$$

Следовательно, нет таких корней, которые можно рассчитать по указанной формуле, и они принадлежали бы указанному промежутку.

$$2) x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Если } n = -2, \text{ то } x = -\frac{3\pi}{4} - 4\pi < -4\pi,$$

$$\text{если } n = -1, \text{ то } x = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{11\pi}{4}; \quad -\frac{11\pi}{4} \in \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right],$$

$$\text{если } n = 0, \text{ то } x = -\frac{3\pi}{4} > -\frac{5\pi}{2}.$$

$$3) \ x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \ m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Если } m = -5, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} - 5\pi < -4\pi,$$

$$\text{если } m = -4, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2}; \quad -\frac{7\pi}{2} \in \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right],$$

$$\text{если } m = -3, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{5\pi}{2}; \quad -\frac{5\pi}{2} \in \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right],$$

$$\text{если } m = -2, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} - 2\pi > -\frac{5\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{2} + \pi m, \ m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } -\frac{7\pi}{2}; \quad -\frac{11\pi}{4}; \quad -\frac{5\pi}{2}.$$

Особенность: даже тогда, когда корень совпал с правым концом промежутка, нужно выполнить «перелёт».



Пример 2 (проект демоверсии ЕГЭ-2026)

а) Решите уравнение $2 + 2 \cos(\pi - 2x) + \sqrt{8} \sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12} \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

$$\text{а) } 2 + 2 \cos(\pi - 2x) + \sqrt{8} \sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12} \sin x;$$

$$2 - 2 \cos 2x + 2\sqrt{2} \sin x = \sqrt{6} + 2\sqrt{3} \sin x;$$

$$2 - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sqrt{2} \sin x = \sqrt{6} + 2\sqrt{3} \sin x;$$

$$2 - 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sqrt{2} \sin x - \sqrt{6} - 2\sqrt{3} \sin x = 0;$$

$$2 - 2 + 4\sin^2 x + 2\sqrt{2} \sin x - \sqrt{6} - 2\sqrt{3} \sin x = 0;$$

$$4\sin^2 x + 2\sqrt{2} \sin x - \sqrt{6} - 2\sqrt{3} \sin x = 0;$$

$$(4\sin^2 x + 2\sqrt{2} \sin x) + (-\sqrt{6} - 2\sqrt{3} \sin x) = 0;$$

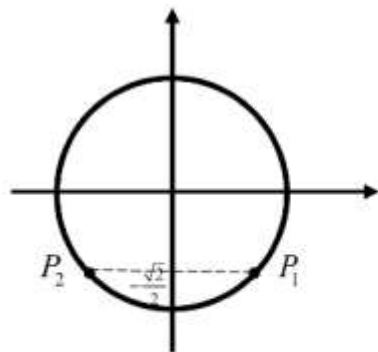
$$2 \sin x (2 \sin x + \sqrt{2}) - \sqrt{3} (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0;$$

$$2 \sin x (2 \sin x + \sqrt{2}) - \sqrt{3} (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0;$$

$$(2 \sin x + \sqrt{2})(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0;$$

$$2 \sin x + \sqrt{2} = 0 \quad \text{или}$$

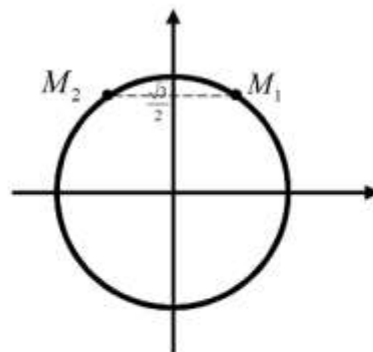
$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2 \sin x - \sqrt{3} = 0;$$

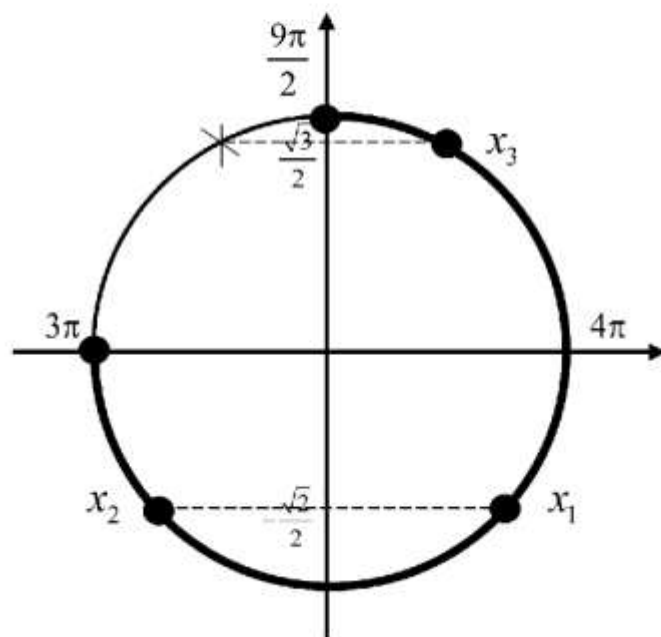
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi p, & p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$6) \left[3\pi; \frac{9\pi}{2} \right]$$

Отберём корни по тригонометрической окружности



$$x_1 = 4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$$

$$x_2 = 3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$$

$$x_3 = 4\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi p, \quad p \in \mathbb{Z};$

$$б) \frac{13\pi}{4}; \quad \frac{15\pi}{4}; \quad \frac{13\pi}{3}.$$

В заданиях, аналогичных примеру 2, участники экзамена часто допускают ошибку в применении формул приведения.

Если участник ЕГЭ знает, что в процессе подготовки к экзамену он неоднократно применял формулы приведения неправильно, то ему нужно осознать, что в этот момент он должен иначе организовать свои действия: нужно не применять мнемоническое правило, а выстроить полную цепочку рассуждений, используя справочный материал ЕГЭ.

На первой странице КИМ (контрольно-измерительного материала) указаны 4 формулы:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Мысленно эти формулы можно дополнить самому:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Преобразование выражения выполнить (можно на черновике, можно в чистовике) более подробно: $\cos(\pi - 2x) = \cos \pi \cdot \cos 2x + \sin \pi \cdot \sin 2x = -1 \cdot \cos 2x + 0 \cdot \sin 2x = -\cos 2x$.



Пример 3

а) Решите уравнение $\frac{(81^{|\cos x|})^{\sin x} - 9^{\sqrt{3} \sin x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение

а) $\frac{(81^{|\cos x|})^{\sin x} - 9^{\sqrt{3} \sin x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(9^{2|\cos x|})^{\sin x} - 9^{\sqrt{3} \sin x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{9^{2\sin x \cdot |\cos x|} - 9^{\sqrt{3} \sin x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9^{2\sin x \cdot |\cos x|} - 9^{\sqrt{3} \sin x} = 0, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9^{2\sin x \cdot |\cos x|} = 9^{\sqrt{3} \sin x}, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x \cdot |\cos x| = \sqrt{3} \sin x, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cdot (2|\cos x| - \sqrt{3}) = 0, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cdot (2|\cos x| - \sqrt{3}) = 0, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \operatorname{tg} x > 0; \\ 2|\cos x| = \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

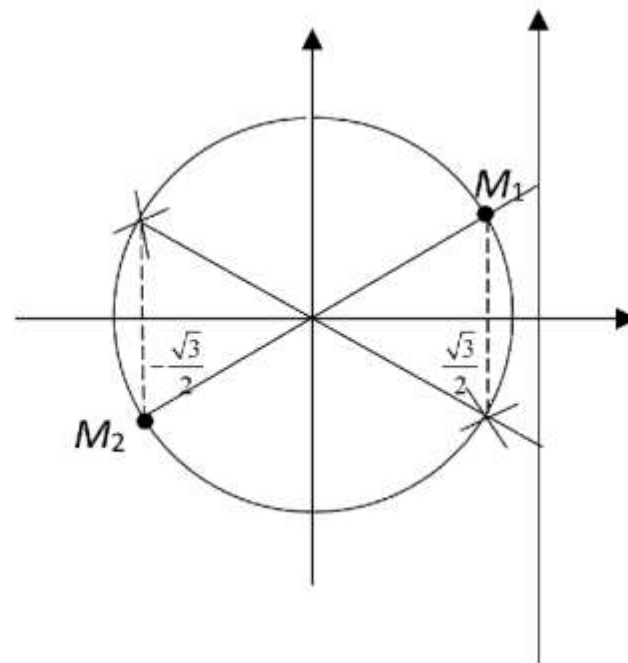
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Возможно, что кто-то захочет преобразовать первое уравнение системы к уравнению $(9^{\sin x})^{2|\cos x|} = (9^{\sin x})^{\sqrt{3}}$, введёт новую переменную: пусть $9^{\sin x} = t$, тогда уравнение примет вид $t^{2|\cos x|} = t^{\sqrt{3}}$, откуда $2|\cos x| = \sqrt{3}$. **Неправильно!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!**

Причины: уравнение $t^{2|\cos x|} = t^{\sqrt{3}}$, где $t = 9^{\sin x}$, не является показательным, техника решения показательных уравнений не применима;

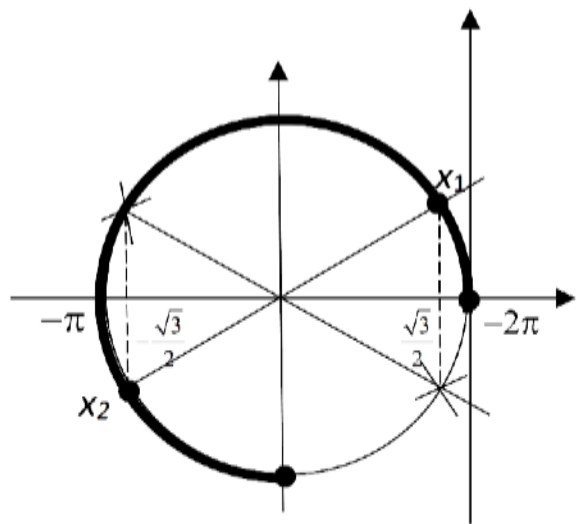
кроме этого, не стоит забывать, что **0 в любой степени с положительным показателем – это 0** (0 нельзя возводить в нулевую степень и в степень с отрицательным показателем);

1 в любой степени – это 1.



б) $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Отберём корни по тригонометрической окружности.



$$x_1 = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$$

$$x_2 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{11\pi}{6}; \quad -\frac{5\pi}{6}.$



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ПАНИНА Н. А.

13.11.2025 состоится занятие «Решение неравенств»

Презентации интенсива размещены на сайте:

http://www.dpo-smolensk.ru/rumo_new/l-pred-emc/2-matematika/intensiv.php