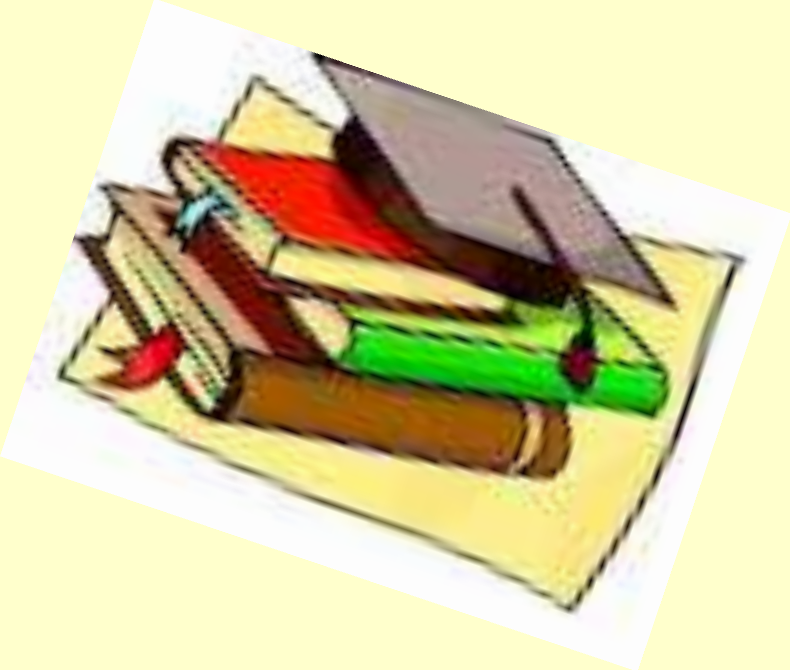
Особенности выполнения задания № 13



Панина Нина Александровна,

учитель математики МБОУ «Средняя школа № 33, г. Смоленск»

Система оценивания выполнения заданий с развернутым ответом основывается на следующих принципах:

1. Возможны различные способы решения и записи развернутого решения. Главное требование

- **из решения должен быть понятен ход рассуждений автора работы.**

В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным.

Следовательно, при выполнении заданий с развернутым ответом части 2 экзаменационной работы в бланке ответов № 2 должны быть записаны **полное обоснованное решение** и **ответ для каждой задачи**. Оценивается математическая грамотность решения.

2. При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Проверка выполнения заданий 13–19 проводится экспертами на основе разработанной системы критериев оценивания

Критерии оценивания задания 13

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте $\boldsymbol{a}$, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта $\boldsymbol{a}$ и пункта ***б***	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Комментарий: к вычислительным ошибкам относятся ошибки при выполнении сложения, вычитания, умножения, деления. И только! Ошибки при вычислении значения степени, корня, при указании значений арксинуса числа (арккосинуса числа и так далее) не относятся к вычислительным, а, следовательно, ведут к оценке «0 баллов».

Обратите внимание, в критериях идёт речь о вычислительной ошибке в единственном числе.

Следовательно, даже 2 вычислительные ошибки приводят к оценке «0 баллов».

Ещё один момент, если допущена вычислительная ошибка и получен ответ только в пункте a) (неправильный, из-за вычислительной ошибки), то оценка «0 баллов» потому, что в критериях сказано, что при этом должны быть верно выполнены все шаги в пунктах a) и б).

Заметим и то, что пункт б) без правильного решения пункта a) НЕ ПРИНОСИТ баллы.

Остальные тонкости оценивания разберём на конкретном примере.

Задание 13

а) Решите уравнение $$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1;$$

$$2\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x-\sqrt{3}\cos x=1;$$

$$2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x\right)+\cos 2x-\sqrt{3}\cos x=1;$$

$$\sin x+\cancel{\sqrt{3}\cdot\cos x}+\cos 2x-\cancel{\sqrt{3}\cos x}=1;$$

$$\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x;$$

$$\sin x-2\sin^2 x=0;$$

$$\sin x - 2\sin^2 x = 0;$$

$$\sin x\left(1 - 2\sin x\right) = 0;$$

$\sin x = 0$ или $1 - 2\sin x = 0;$

$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \sin x = \dfrac{1}{2};$

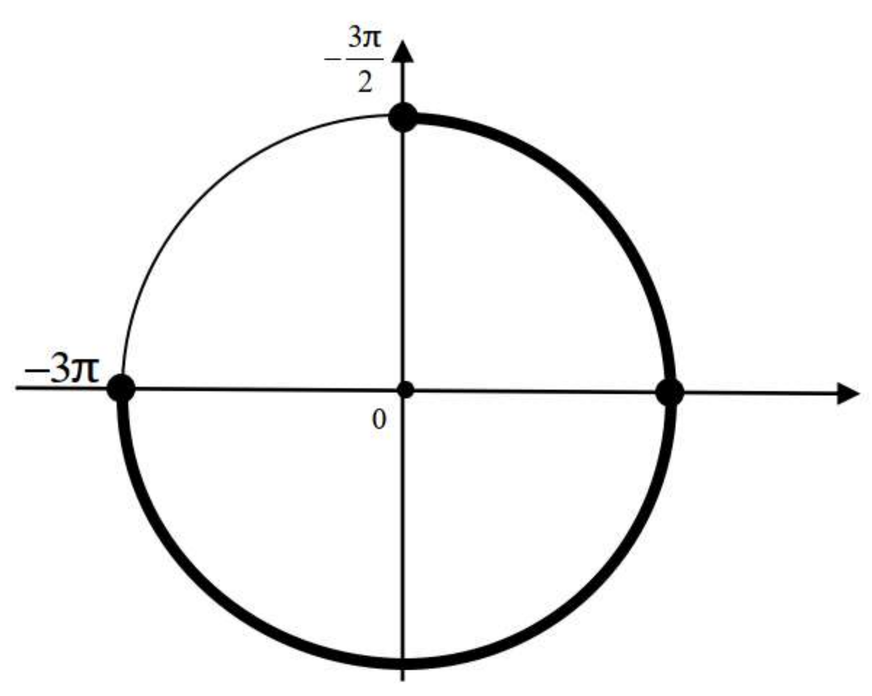
$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Комментарий: Решение задачи a) обоснованное, верное. Более подробно объяснить решение можно, но в этом нет необходимости.

б) Отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$, по тригонометрической окружности.

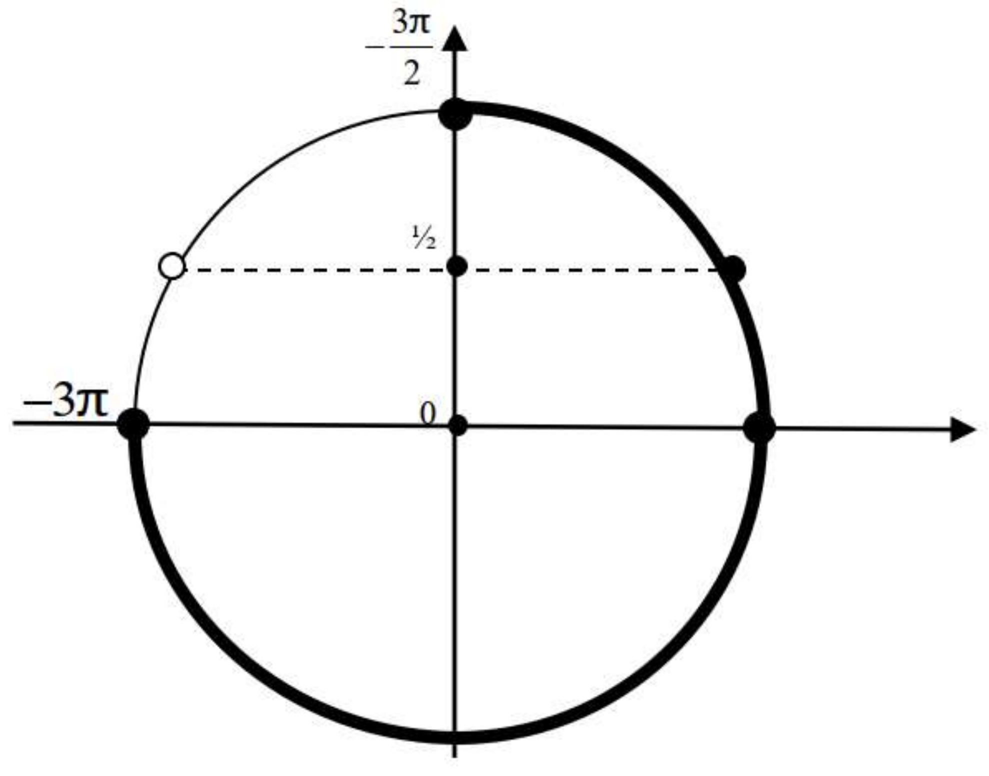
Решение по тригонометрической окружности признаётся обоснованным, если

- на чертеже ярко выделена **дуга**, соответствующая отрезку, указанному в условии (выделение дуги штриховкой, например, как в учебнике А. Г. Мордковича, даже лучше),
- чётко указаны **концы дуги** (открытые или закрытые) и графически, и аналитически (**точки выделены на чертеже и подписаны**),

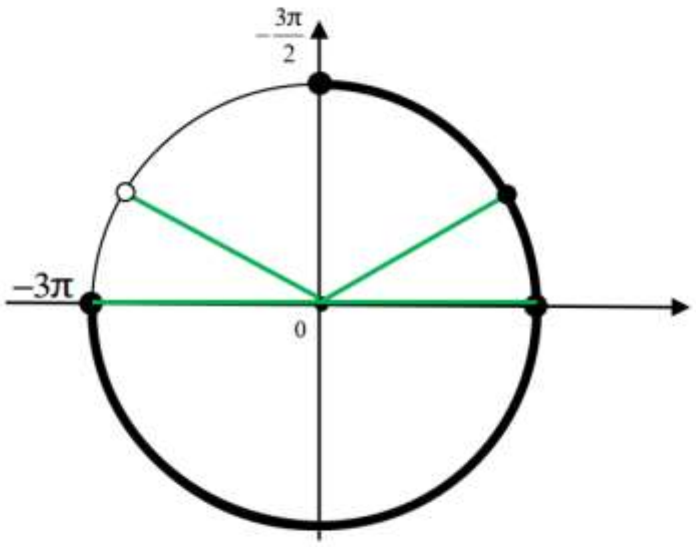


• отбор корней по тригонометрической окружности выполнен по уравнениям, на которые распадается исходное уравнение (в данном случае, это уравнения $\sin x = 0, \quad \sin x = \frac{1}{2}$), **на осях отмечены точки** (в разбираемом примере, это 0 и $\frac{1}{2}$), выполнены необходимые **построения** для получения точек на окружности (в данном случае, это перпендикуляры к оси синусов),

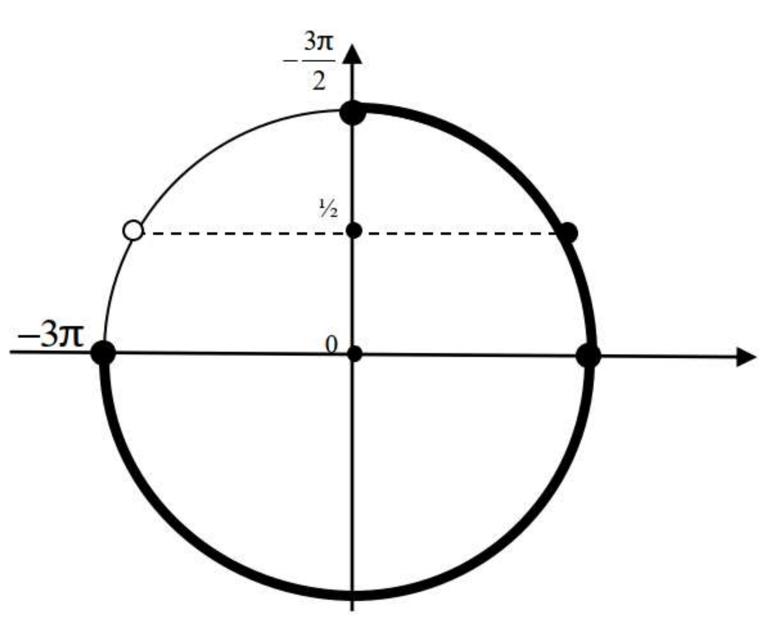
ИЛИ

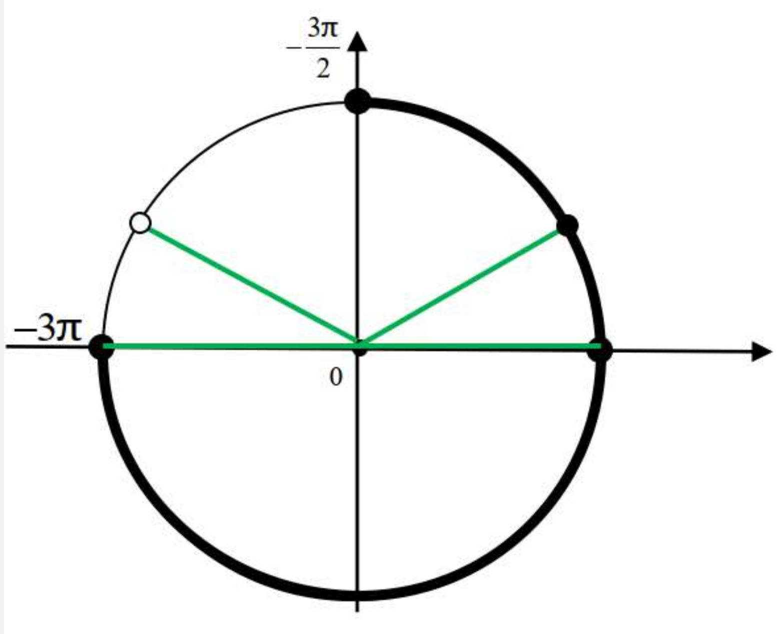


- отбор корней по тригонометрической окружности выполнен по множеству корней исходного уравнения (в данном случае, это $x=\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$, $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\quad m\in\mathbb{Z}$), выполнены необходимые **построения** для получения точек на окружности (в данном случае, это радиусы),

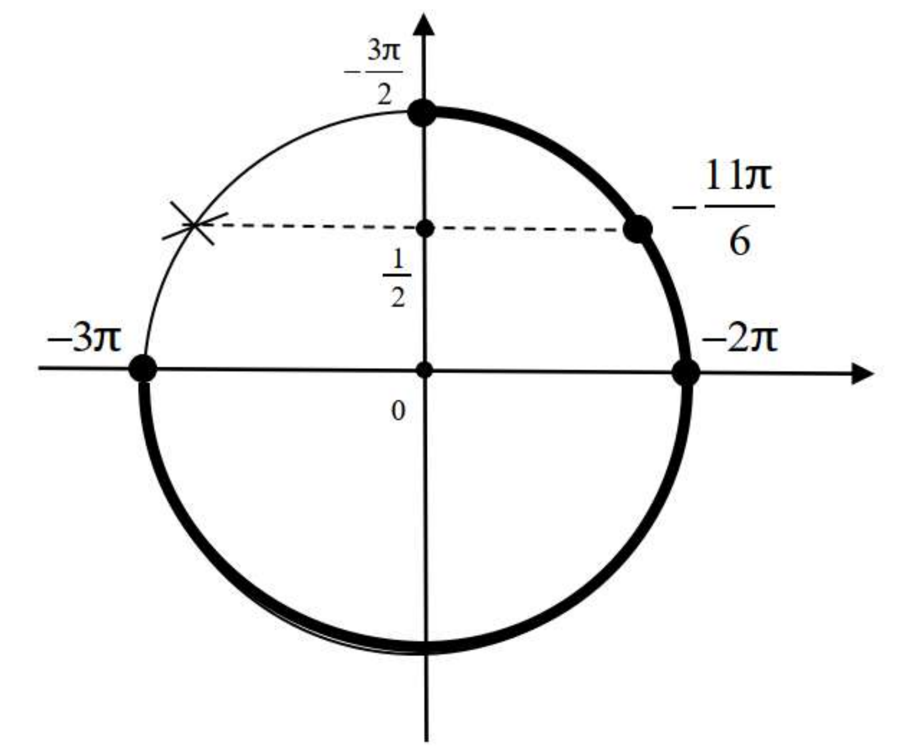


- проведен **анализ принадлежности** полученных на окружности точек выделенной дуге,
- **точки**, принадлежащие дуге, **выделены** (закрашенный кружочек); точки, не принадлежащие, – **удалены** (символами удаления являются выкалывание (как в школьном учебнике, пустой кружочек) и символ, напоминающий небольшой крест (это две встречные стрелки, которые сходятся в одной точке и каждая из которых удаляет конец движения по окружности), использовать можно любой из указанных символов,





- рядом с окружностью <u>составлены **формулы расчёта**</u> отбираемых корней, вычислены корни, принадлежащие указанному в условии промежутку (в обоих случаях формулы расчёта отбираемых корней одинаковые, поэтому представляю только один случай),



$$x_1 = -3\pi$$

$$x_2 = -3\pi + \pi = -2\pi$$

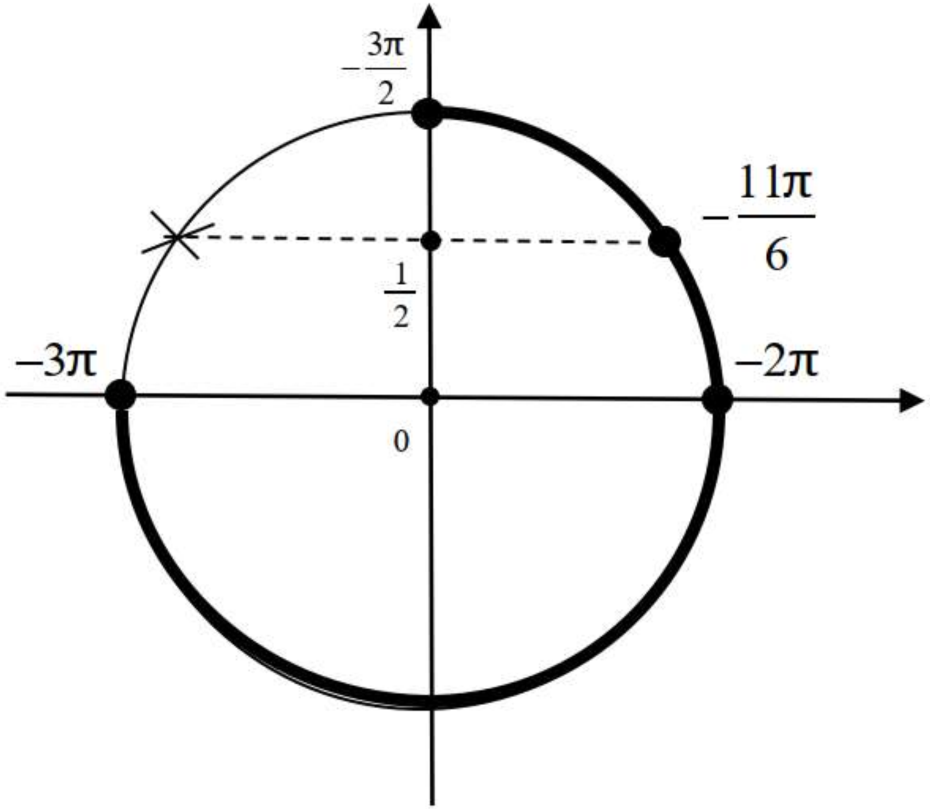
$$x_3 = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$$

- **корни подписаны на окружности** (на окружности можно подписывать не -3π, а x_1, не -2π, а x_2, не $-\frac{11\pi}{6}$, а x_3, при этом рядом с окружностью есть расшифровка этих значений).

Пошагово рассмотрели действия участника ЕГЭ по представлению решения задачи 13 б) по тригонометрической окружности. В работе участника ЕГЭ результат этой работы предъявлен следующим образом:

Верное, обоснованное решение:

б) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$



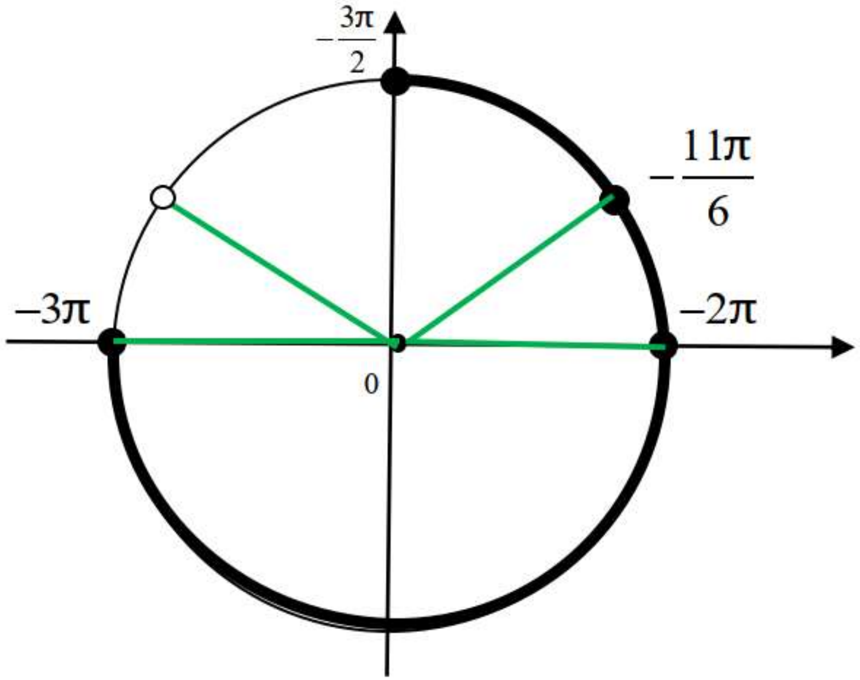
$$x_1 = -3\pi$$

$$x_2 = -3\pi + \pi = -2\pi$$

$$x_3 = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$$

или

б) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$



$$x_1 = -3\pi$$

$$x_2 = -3\pi + \pi = -2\pi$$

$$x_3 = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$$

PS Крест – это символ удаления, а не выделения. К сожалению, некоторые участники ЕГЭ именно так, выделяют корни, принадлежащие промежутку. Неправильное использование символики.

Выполняя отбор по окружности, в момент анализа принадлежности получаемых на окружности точек выделенной дуге, мы устанавливаем количество корней, принадлежащих промежутку. А это один из неявных способов доказательства, что других корней, (кроме указанных 3-х в разобранном примере), не будет.

Другой способ решения задачи б) – **метод перебора**. Часто встречается в экзаменационных работах, но в большинстве случаев решение неправильное.

Решение любой задачи (и на ЕГЭ в том числе) **заключается в отыскании всех верных ответов и доказательстве, что других ответов нет.**

Выполняя отбор корней неравенством, устанавливаем, что указанному промежутку принадлежат решения лишь при полученных значениях параметра из множества целых чисел. И это даёт возможность рассчитать корни, принадлежащие промежутку, и одновременно является доказательством, что ни при каких других значениях параметра мы не получим ответ из промежутка.

Выполняя отбор по окружности, в момент анализа принадлежности получаемых на окружности точек выделенной дуге, мы устанавливаем количество корней, принадлежащих промежутку. А это один из неявных способов доказательства, что других корней, (кроме указанных 3-х в разобранном примере), не будет.

Отбирая корни методом перебора, работаем с формулами решений уравнения. В разобранном примере, это $x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$. Три линейных возрастающих функции, заданных на множестве целых чисел. Поэтому **правильное решение должно строиться «по методу артиллериста»:**

при последовательном увеличении значения параметра на 1 нужно обеспечить

- **недолёт до промежутка,**
- **попадание на промежуток,**
- **перелёт.**

И даже, если попадание совпало с правым концом промежутка, то перелёт, всё равно, является обязательным!!!!!!!!!!!!!!!!!

б) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Отберём корни уравнения методом перебора.

1) $x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Если $n = -4$, то $x = -4\pi, \quad -4\pi \notin \left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right], \quad -4\pi < -3\pi$,

если $n = -3$, то $x = -3\pi, \quad -3\pi \in \left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$,

если $n = -2$, то $x = -2\pi, \quad -2\pi \in \left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$,

если $n = -1$, то $x = -\pi, \quad -\pi \notin \left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right], \quad -\pi > -\frac{3\pi}{2}$.

2) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Если $k = -2$, то

$$x = \frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{23\pi}{6}, \qquad -\frac{23\pi}{6} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right], \qquad -\frac{23\pi}{6} < -3\pi,$$

если $k = -1$, то $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}, \qquad -\frac{11\pi}{6} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right],$

если $k = 0$, то $x = \frac{\pi}{6}, \qquad \frac{\pi}{6} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right], \qquad \frac{\pi}{6} > -\frac{3\pi}{2}$.

3) $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}$.

Если $m=-2$, то

$$x=\frac{5\pi}{6}-4\pi=-\frac{19\pi}{6}, \quad -\frac{19\pi}{6}\notin\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right], \quad -\frac{19\pi}{6}<-3\pi,$$

если $m=-1$, то

$$x=\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{7\pi}{6}, \quad -\frac{7\pi}{6}\notin\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right], \quad -\frac{7\pi}{6}>-\frac{3\pi}{2}.$$

Ответ: а) $\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}, \qquad \frac{\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}, \qquad \frac{5\pi}{6}+2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}$;

б) $-3\pi, \quad -2\pi, \qquad -\frac{11\pi}{6}$

PS Отбор корней с помощью неравенств рассмотрим в следующем задании.

Задание 13

а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin 2x=0$ **.**

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

Верно выполнили задание лишь 24% участников ЕГЭ, выполняющих вариант. Основная ошибка в применении формулы приведения. Это несколько странно, так как КИМ содержал справочный материал:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Решение. а) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin 2x=0;$

$$2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2+\sin 2x=0;$$

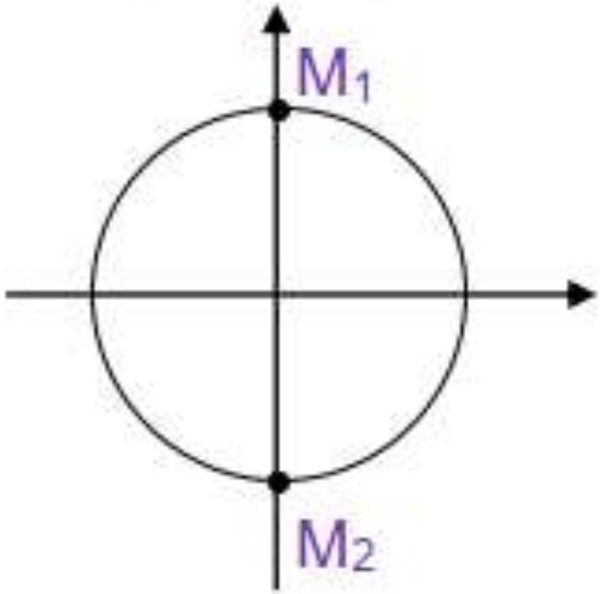
$$2(\cos x)^2+2\sin x\cos x=0;$$

$$2\cos x(\cos x+\sin x)=0;$$

$\cos x=0$ или $\cos x+\sin x=0.$

$$1)\ \cos x = 0$$

Желательно, чтобы учащиеся осознанно (а не по заучиванию) продолжали решение, понимая, как располагается множество решений на тригонометрической окружности. Статистика ЕГЭ показывает, что именно в этот момент многие делают ошибки, путая $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, бездумно добавляя $2\pi n$ или πn.



$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2) $\cos x + \sin x = 0$

Пусть $\cos x = 0$. Тогда имеем

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ 0 + \sin x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\sin^2 x + \cos^2 x = 0 + 0 = 0$, что противоречит тождеству $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Следовательно, корни уравнения таковы, что $\cos x \neq 0$. Можно разделить обе части уравнения на $\cos x$.

2) $\cos x + \sin x = 0$

Пусть $\cos x = 0$. Тогда имеем

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ 0 + \sin x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\sin^2 x + \cos^2 x = 0 + 0 = 0$, что противоречит тождеству $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Следовательно, корни уравнения таковы, что $\cos x \neq 0$. Можно разделить обе части уравнения на $\cos x$.

б) $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

$3\pi \le \frac{\pi}{2} + \pi n \le \frac{9\pi}{2};$

$6\pi \le \pi + 2\pi n \le 9\pi;$

$5\pi \le 2\pi n \le 8\pi;$

$\frac{5}{2} \le n \le 4;$

$2\frac{1}{2} \le n \le 4.$

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то $n = 3;\ 4.$

Тогда $x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2},$

$x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}.$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

$3\pi \le -\frac{\pi}{4} + \pi k \le \frac{9\pi}{2};$

$12\pi \le -\pi + 4\pi k \le 18\pi;$

$13\pi \le 4\pi k \le 19\pi;$

$\frac{13}{4} \le k \le \frac{19}{4};$

$3\frac{1}{4} \le k \le 4\frac{3}{4}.$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то $k = 4.$

Тогда $x = -\frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{15\pi}{4}.$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \qquad -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{2}; \frac{15\pi}{4}; \frac{9\pi}{2}.$

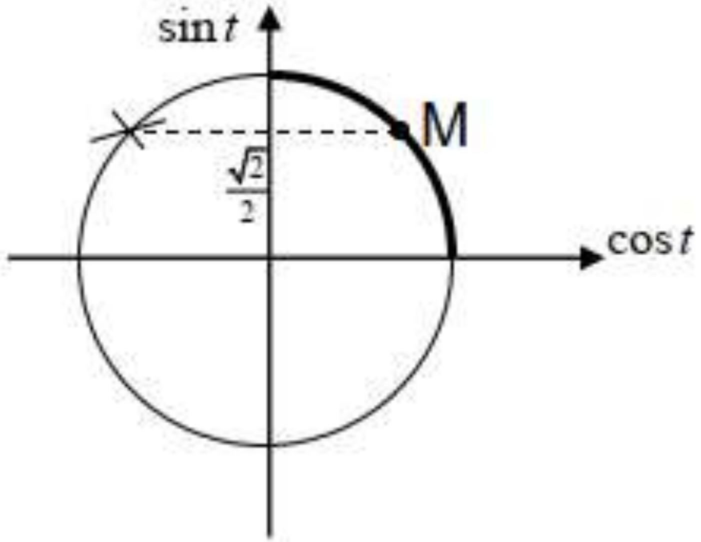
13. (Вариант 316, сайт Ларин А. А.)

а) Решите уравнение $\log_2 \sin 2x + \log_{\frac{1}{2}} \cos x = \frac{1}{2}$.

Решение

$$\begin{cases} \sin 2x > 0, \\ \cos x > 0, \\ \log_2 \sin 2x + \log_{2^{-1}} \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x > 0, \\ 2\sin x \cos x > 0, \\ \log_2 \sin 2x - \log_2 \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > 0, \\ \log_2 \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos x} = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > 0, \\ \log_2 2\sin x = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > 0, \\ 2\sin x = 2^{\frac{1}{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > 0, \\ 2\sin x = \sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > 0, \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$



$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

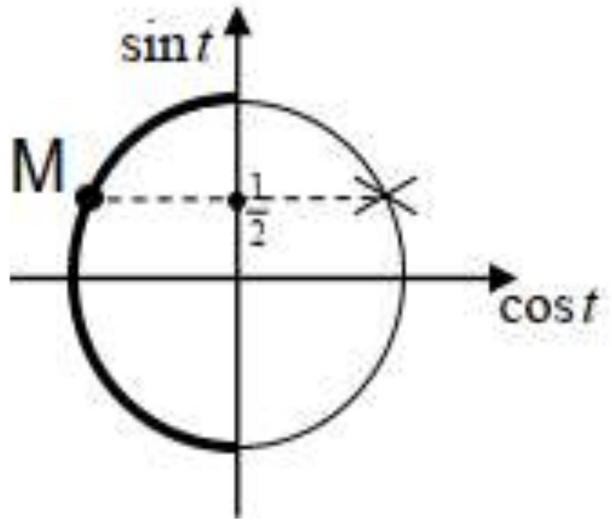
13. (Вариант 33 006 764, сайт Решу ЕГЭ)

а) Решите уравнение $(2\sin x-1)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$.

Решение. $(2\sin x-1)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$;

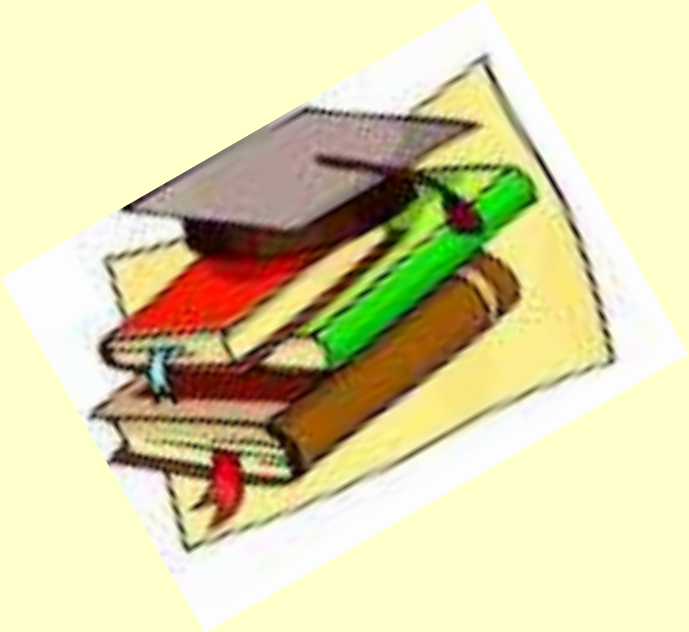
$\sqrt{-\cos x}+1\geq 1$ при любом допустимом значении x. Поэтому имеем:

$$\begin{cases}-\cos x\geq 0,\\ 2\sin x-1=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos x\leq 0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2};\end{cases}\qquad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$



Ответ: $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$.

Благодарю за внимание!



Панина Н. А.

+79051620770