

Особенности выполнения задания 16 (вклады, кредиты)



Панина Нина Александровна,
учитель математики МБОУ
«Средняя школа № 33, г. Смоленск»

Требования к развёрнутому ответу в задании 16

1) При построении математической модели **каждое** математическое выражение должно сопровождаться интерпретацией (толкованием смысла выражения).

2) Составляя модель, необходимо **отразить главную причинно-следственную связь** и после этого представить уравнение (неравенство, ...).

3) После выполнения работы с моделью полученный **результат необходимо интерпретировать**, а затем ответить на главный вопрос задачи.

Применение банковских формул не допускается

Возможны различные способы решения, могут быть произвольными формы записи (текстовое сопровождение, таблица, логические схемы), но **из решения должен быть понятен ход рассуждений автора работы.**

Оценивается математическая грамотность и обоснованность решения.

Высшим баллом (2 первичных балла) оценивается только **полное обоснованное решение и верный ответ.**

Если обоснованно и правильно составлена модель, но решение не завершено или получен неверный ответ, то выставляется оценка 1 первичный балл.

Оценка за правильно составленную модель **при отсутствии смысловой составляющей** – 0 баллов (даже в том случае, когда получен верный ответ к задаче).

Задачи на вклады

1.

Владелец автосалона решил разделить свой капитал на 3 части и вложить их в 3 различных банка, причем годовые процентные ставки в этих банках относятся как $2 : 3 : 5$. В каком отношении он должен поделить свой капитал, чтобы через год чистая прибыль от вкладов во всех трех банках была одинакова?

Источник: https://shkolkovo.net/catalog/slozhnye_zadachi_prikladnogo_haraktera/pro_bankovskij_vklad

© shkolkovo.net

Решение. Пусть A рублей – первоначальный вклад в первом банке, B рублей – во втором, C рублей – в третьем.

Пусть $(2k)\%$ - годовая ставка в первом банке, $(3k)\%$ - во втором, $(5k)\%$ - в третьем.

Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

Банк	Сумма на начало года, рублей	Сумма на конец года, рублей	Чистая прибыль, рублей
Первый	A	$\frac{100 + 2k}{100} \cdot A$	$\frac{2k}{100} \cdot A$
Второй	B	$\frac{100 + 3k}{100} \cdot B$	$\frac{3k}{100} \cdot B$
Третий	C	$\frac{100 + 5k}{100} \cdot C$	$\frac{5k}{100} \cdot C$

По условию задачи чистая прибыль от вкладов во всех трёх банках одинаковая.

$$\begin{cases} \frac{2k}{100} \cdot A = \frac{3k}{100} \cdot B, \\ \frac{2k}{100} \cdot A = \frac{5k}{100} \cdot C; \end{cases} \quad \begin{cases} 2k \cdot A = 3k \cdot B, \\ 2k \cdot A = 5k \cdot C. \end{cases}$$

По смыслу задачи $k > 0$. Тогда

$$\begin{cases} 3B = 2A, \\ 5C = 2A; \end{cases} \quad \begin{cases} B = \frac{2A}{3}, \\ C = \frac{2A}{5}. \end{cases}$$

Следовательно, первоначальный вклад в первом банке должен составлять A рублей, во втором банке $\frac{2A}{3}$ рублей, в третьем банке $\frac{2A}{5}$ рублей, капитал следует поделить в отношении

$$A : \frac{2A}{3} : \frac{2A}{5};$$

$$15A : 10A : 6A;$$

$$15 : 10 : 6.$$

Ответ: в отношении 15 : 10 : 6

2.

В начале года у Ивана есть 90 тыс. рублей, которые он может положить целиком либо на банковский, либо на инвестиционный счёт. Сумма на инвестиционном счёте на конец любого года вычисляется по формуле $S = 1,1 \cdot S_0 - 2000$, где S_0 – сумма на инвестиционном счёте на начало года в рублях. На банковском счёте сумма увеличивается за год на 8%. В начале любого года Иван может переложить всю сумму с одного счёта на другой. Какая наибольшая сумма может быть на счёте у Ивана через 4 года? Ответ дайте в рублях.

Источник: <https://alexlarin.net/ege/2024/trvar446.html>

Решение. Первый способ

1) Сравним суммы в конце первого года вложения денег.

Инвестиционный счёт		Банковский счёт	
Сумма на начало года, рублей	Сумма на конец года, рублей	Сумма на начало года, рублей	Сумма на конец года, рублей
90 000	$1,1 \cdot 90\,000 - 2000 =$ $= 99\,000 - 2000 =$ $= 97\,000$	90 000	$1,08 \cdot 90\,000 =$ $= 97\,200$

Следовательно, в первый год наибольшую сумму обеспечит вложение денег на банковский счёт.

2) Выберем более выгодный вариант и сравним суммы в конце второго года хранения денег.

Инвестиционный счёт		Банковский счёт	
Сумма на начало года, рублей	Сумма на конец года, рублей	Сумма на начало года, рублей	Сумма на конец года, рублей
97 200	$1,1 \cdot 97\,200 - 2000 =$ $= 106\,920 - 2000 =$ $= 104\,920$	97 200	$1,08 \cdot 97\,200 =$ $= 104\,976$

Следовательно, чтобы получить наибольшую сумму через 4 года, нужно во второй год оставить деньги на банковском счёте.

3) Выберем более выгодный вариант и сравним суммы в конце третьего года хранения денег.

Инвестиционный счёт		Банковский счёт	
Сумма на начало года, рублей	Сумма на конец года, рублей	Сумма на начало года, рублей	Сумма на конец года, рублей
104 976	$1,1 \cdot 104\,976 - 2000 =$ $= 115\,473,6 - 2000 =$ $= 113\,473,6$	104 976	$1,08 \cdot 104\,976 =$ $= 113\,374,08$

В третий год бóльшую сумму обеспечивает инвестиционный счёт. Следовательно, чтобы получить наибольшую сумму через 4 года, нужно в начале третьего года переложить всю сумму с банковского счёта на инвестиционный.

4) Выберем более выгодный вариант и сравним суммы в конце четвертого года хранения денег.

Инвестиционный счёт		Банковский счёт	
Сумма на начало года, рублей	Сумма на конец года, рублей	Сумма на начало года, рублей	Сумма на конец года, рублей
113 473,6	$1,1 \cdot 113\,473,6 - 2000 =$ $= 124\,820,96 - 2000 =$ $= 122\,820,96$	113 473,6	$1,08 \cdot 113\,473,6 =$ $= 122\,551,488$

Следовательно, в четвертый год деньги должны остаться на инвестиционном счёте. Наибольшая сумма на счёте через 4 года составит 122 820,96 рублей.

Ответ: 122 820,96 рублей – наибольшая сумма на счёте через 4 года.

Второй способ решения

Пусть A рублей – сумма на любом счёте в начале года. Тогда через год сумма на инвестиционном счёте составит $(1,1 \cdot A - 2000)$ рублей, на банковском счёте $1,08A$ рублей.

Выясним, при каких значениях A выгоднее инвестиционный счёт, а при каких – банковский.

$$1,1 \cdot A - 2000 > 1,08A;$$

$$1,1A - 1,08A > 2000;$$

$$0,02A > 2000;$$

$$A > 100\,000.$$

Следовательно, если сумма в начале года менее 100 000 рублей, то бóльшую прибыль принесёт банковский счёт, если больше 100 000 рублей – то инвестиционный счёт, если ровно 100 000 рублей, то можно выбирать любой счёт.

Год	Сумма на начало года, рублей	Счёт	Сумма на конец года, рублей
1-й	90 000	Банковский	$1,08 \cdot 90\,000 = 97\,200$
2-й	97 200	Банковский	$1,08 \cdot 97\,200 = 104\,976$
3-й	104 976	Инвестиционный	$1,1 \cdot 104\,976 - 2000 =$ $= 115\,473,6 - 2000 =$ $= 113\,473,6$
4-й	113 473,6	Инвестиционный	$1,1 \cdot 113\,473,6 - 2000 =$ $= 124\,820,96 - 2000 =$ $= 122\,820,96$

122 820,96 рублей – наибольшая сумма, которая может быть на счёте через 4 года.

Ответ: 122 820,96 рублей.

3.

В январе 2014 года Андрей сделал вклад в размере 6 640 000 рублей под $u\%$ годовых. В феврале 2014 года он захотел купить квартиру стоимостью 9 млн. рублей, но решил для этого взять кредит под 21% годовых на 15 лет, который необходимо выплачивать дифференцированными платежами. Найдите наименьшее число u , чтобы процентов, начисляемых на его вклад каждый год, было достаточно для того, чтобы вносить платежи в счет погашения кредита.

Источник: https://shkolkovo.net/catalog/slozhnye_zadachi_prikladnogo_haraktera/pro_bankovskij_vklad

© shkolkovo.net

PS Дифференцированные платежи – платежи, состоящие из двух частей. Первая часть уходит на погашение начисленных банком процентов (проценты начисляются на оставшуюся сумму долга), а вторая (фиксированная) – на оплату основного долга (суммы, взятой в кредит).

Решение. 1) Рассмотрим кредит.

9 000 000 рублей – сумма основного долга по кредиту. Её нужно равномерно уменьшать в течение 15 лет.

Следовательно, на $\frac{9\,000\,000}{15} = 600\,000$ рублей ежегодно должна уменьшаться сумма основного долга.

Так как сумма оставшегося долга по кредиту уменьшается с каждой выплатой, то сумма денег по банковским процентам ежегодно уменьшается и окажется самой большой в первый год выплаты кредита.

В первый год Андрей должен будет выплатить по кредиту $(0,21 \cdot 9\,000\,000 + 600\,000)$ рублей, т. е. 2 490 000 рублей. Это самая большая выплата по кредиту. По условию задачи её необходимо компенсировать банковскими процентами по вкладу.

2) Рассмотрим банковский вклад.

Год	Сумма на начало года, рублей	Сумма денег по начисленным процентам, рублей	Сумма на конец года, рублей
2014	6 640 000	$\frac{y}{100} \cdot 6\,640\,000 = 66\,400y$	$6\,640\,000 + 66\,400y$
и так далее			

Ежегодно сумма на счёте увеличивается, а, следовательно, ежегодно увеличивается сумма денег, начисленных по процентам. Наименьшая сумма процентных денег приходится на первый год и составит $66\,400y$ рублей.

3) Так как самая маленькая прибыль по вкладу и самая большая выплата по кредиту приходятся на первый год, то если в первый год проценты, начисляемые на вклад, компенсируют очередную выплату кредита, то и в другие годы проценты со вклада компенсируют выплаты кредита. Необходимо и достаточно, чтобы

$$66\,400y \geq 2\,490\,000;$$

$$664y \geq 24\,900;$$

$$y \geq 37,5.$$

37,5% – минимальный процент по вкладу.

Ответ: $y_{\text{наим.}} = 37,5$.

Задачи на кредиты

4.

В июле 2025 года планируется взять кредит на 10 лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Анализ условия (выполняется устно).

- 1) Каждый январь долг увеличивается, причём каждый год увеличение разное (рассчитываются 20% от остатка долга).
- 2) Это увеличение не должно влиять на остаток долга после выплаты в июле (в июле каждого года в 2026-2030 годах долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года).

Следовательно, каждый год с 2026 по 2030 *нужно выплачивать сумму увеличения долга и фиксированную сумму*, на которую уменьшается долг к июлю каждого года.

**Важно знать - на сколько увеличился долг в январе,
- на сколько уменьшился в июле,
- чему равен остаток долга.**

Аналогично в 2031-2035 годах, но фиксированная сумма должна стать другой.

Решение. Пусть 1300 тыс. рублей = S тыс. рублей.

Пусть $20\% = 0,2 = k$.

Пусть к июлю 2026 – 2030 годов долг уменьшается на a тыс. рублей по сравнению с долгом на июль предыдущего года.

Пусть к июлю 2031 – 2035 годов долг уменьшается на b тыс. рублей по сравнению с долгом на июль предыдущего года.

Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

Год	В январе банк увеличит долг на ... тыс. рублей	Клиент выплатит ... тыс. рублей	Долг в конце года, тыс. рублей
2025	-	-	S
2026	kS	$kS + a$	$S - a$
2027	$k(S - a) = kS - ka$	$kS - ka + a$	$S - 2a$
2028	$k(S - 2a) = kS - 2ka$	$kS - 2ka + a$	$S - 3a$
2029	$k(S - 3a) = kS - 3ka$	$kS - 3ka + a$	$S - 4a$
2030	$k(S - 4a) = kS - 4ka$	$kS - 4ka + a$	$S - 5a$
2031	$k(S - 5a) = kS - 5ka$	$kS - 5ka + b$	$S - 5a - b$
2032	$k(S - 5a - b) = kS - 5ka - kb$	$kS - 5ka - kb + b$	$S - 5a - 2b$
2033	$k(S - 5a - 2b) = kS - 5ka - 2kb$	$kS - 5ka - 2kb + b$	$S - 5a - 3b$
2034	$k(S - 5a - 3b) = kS - 5ka - 3kb$	$kS - 5ka - 3kb + b$	$S - 5a - 4b$
2035	$k(S - 5a - 4b) = kS - 5ka - 4kb$	$kS - 5ka - 4kb + b$	$S - 5a - 5b$

По условию задачи к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью. Тогда в 2035 году остаток долга равен 0.

$$S - 5a - 5b = 0;$$

$$1300 - 5a - 5b = 0, \text{ так как } S = 1300;$$

$$a + b = 260;$$

$$b = 260 - a.$$

Сумма всех платежей после полного погашения кредита составит (тыс. рублей):

$10kS - 35ka - 10kb + 5a + 5b$, что равно 2580 тыс. рублей.

Учтём, что $S = 1300$, $k = 0,2$, $5a + 5b = 1300$, $b = 260 - a$, тогда получим:

$$10 \cdot 0,2 \cdot 1300 - 35 \cdot 0,2a - 10 \cdot 0,2(260 - a) + 1300 = 2580;$$

$$10 \cdot 0,2 \cdot 1300 - 35 \cdot 0,2a - 10 \cdot 0,2(260 - a) + 1300 = 2580;$$

$$2600 - 7a - 520 + 2a + 1300 = 2580;$$

$$5a = 800.$$

Следовательно, в июле 2030 года долг составит

$$S - 5a = 1300 - 800 = 500 \text{ (тыс. рублей)} = 500\,000 \text{ рублей.}$$

Ответ: 500 000 рублей – долг в июле 2030 года.

5.

В начале месяца Василий взял в банке кредит 2,4 млн. рублей с месячной ставкой 5% на 12 месяцев с погашением кредита по следующей схеме:

- в начале каждого месяца банк увеличивает долг на 5%;
- выплаты производятся в конце каждого месяца;
- каждая следующая выплата на 5% больше предыдущей.

Сколько тысяч рублей должна составлять первая выплата, чтобы Василий погасил свой кредит по указанной схеме за 12 месяцев?

Источник: <https://alexlarin.net/ege/2024/trvar441.html>

Анализ условия (выполняется устно).

Ключевое слово в условии «**выплата**».

- 1) Выплата увеличивается на 5% каждый месяц.
- 2) Клиент *просто выплачивает кредит, не обращая внимание на назначение денег*. Ему не важно, какая сумма уходит на погашение процентных увеличений, а какая – на погашение первоначального долга.

Следовательно, важно знать

- **чему равен долг до выплаты** (после начисления процентов он составляет 105% от долга на конец предыдущего месяца),
- **чему равна выплата,**
- **чему равен остаток долга после выплаты.**

Решение. 2,4 млн. рублей = 2400 тыс. рублей.

Пусть $2400 = S$. Пусть $105\% = 1,05 = k$.

Пусть x тыс. рублей – первая выплата.

Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

Месяц	Долг в начале месяца после начисления процентов, тыс. рублей	Выплата, тыс. рублей	Долг после выплаты, тыс. рублей
0-й	-	-	S
1-й	kS	x	$kS - x$
2-й	$k(kS - x)$	kx	$k(kS - x) - kx = k(kS - 2x)$
3-й	$k^2(kS - 2x)$	k^2x	$k^2(kS - 2x) - k^2x = k^2(kS - 3x)$
4-й	$k^3(kS - 3x)$	k^3x	$k^3(kS - 3x) - k^3x = k^3(kS - 4x)$
...
12-й	$k^{11}(kS - 11x)$	$k^{11}x$	$k^{11}(kS - 11x) - k^{11}x = k^{11}(kS - 12x)$

По условию задачи кредит должен быть погашен за 12 месяцев. Следовательно, долг после 12-й выплаты должен быть равен 0.

$$k^{11}(kS - 12x) = 0.$$

Так как $k = 1,05 \neq 0$, то $kS - 12x = 0$.

Учтём, что $S = 2400$, $k = 1,05$. Получим:

$$1,05 \cdot 2400 - 12x = 0;$$

$$105 \cdot 24 - 12x = 0;$$

$$105 \cdot 2 - x = 0;$$

$$x = 210.$$

210 тыс. рублей должна составлять первая выплата.

Ответ: 210 тысяч рублей – первая выплата.

6.

В июле 2025 года планируется взять кредит на 10 лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года (r – целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей.

Найдите r .

Решение. Первый способ.

Пусть 800 тыс. рублей = S тыс. рублей.

Пусть $r\% = \frac{r}{100} = k$.

Пусть к июлю 2026 – 2030 годов долг уменьшается на a тыс. рублей по сравнению с долгом на июль предыдущего года.

Пусть к июлю 2031 – 2035 годов долг уменьшается на b тыс. рублей по сравнению с долгом на июль предыдущего года.

Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

Год	В январе банк увеличит долг на ... тыс. рублей	Клиент выплатит ... тыс. рублей	Долг в конце года, тыс. рублей
2025	-	-	S
2026	kS	$kS + a$	$S - a$
2027	$k(S - a) = kS - ka$	$kS - ka + a$	$S - 2a$
2028	$k(S - 2a) = kS - 2ka$	$kS - 2ka + a$	$S - 3a$
2029	$k(S - 3a) = kS - 3ka$	$kS - 3ka + a$	$S - 4a$
2030	$k(S - 4a) = kS - 4ka$	$kS - 4ka + a$	$S - 5a = 200$
2031	$200k$	$200k + b$	$200 - b$
2032	$k(200 - b) = 200k - kb$	$200k - kb + b$	$200 - 2b$
2033	$k(200 - 2b) = 200k - 2kb$	$200k - 2kb + b$	$200 - 3b$
2034	$k(200 - 3b) = 200k - 3kb$	$200k - 3kb + b$	$200 - 4b$
2035	$k(200 - 4b) = 200k - 4kb$	$200k - 4kb + b$	$200 - 5b = 0$

По условию задачи в июле 2030 года долг должен составить 200 тыс. рублей, а к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью. Тогда в 2035 году остаток долга равен 0.

$$\begin{cases} S - 5a = 200, \\ 200 - 5b = 0; \end{cases} \begin{cases} 800 - 5a = 200, \\ b = 40 \end{cases} \begin{cases} a = 120, \\ b = 40. \end{cases}$$

На 120 тыс. рублей ежегодно уменьшался долг в 2026-2030 годах, на 40 тыс. рублей – в 2031-2035 годах.

Сумма всех платежей после полного погашения кредита составит

$(5kS + 1000k - 10ka - 10kb + 5a + 5b)$ тыс. рублей. Это (по условию) 1480 тыс. рублей.

Учтём, что $S = 800$, $a = 120$, $b = 40$, тогда получим:

$$5k \cdot 800 + 1000k - 10k \cdot 120 - 10k \cdot 40 + 5 \cdot 120 + 5 \cdot 40 = 1480;$$

$$4000k + 1000k - 1200k - 400k + 600 + 200 = 1480;$$

$$3400k = 680;$$

$$10k = 2;$$

$$k = 0,2.$$

Так как $k = \frac{r}{100}$, то $\frac{r}{100} = 0,2$; $r = 20$.

20 – целое число, что соответствует условию задачи.

Каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года.

Ответ: $r = 20$.

Второй способ.

За первые 5 лет сумма основного долга должна равномерно уменьшиться на $(800 - 200)$, то есть на 600 тыс. рублей. Следовательно, в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на 120 тыс. рублей меньше долга на июль предыдущего года.

За следующие 5 лет сумма основного долга должна равномерно уменьшиться с 200 тыс. рублей до 0. Следовательно, в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на 40 тыс. рублей меньше долга на июль предыдущего года

Пусть 800 тыс. рублей = S тыс. рублей,
120 тыс. рублей = a тыс. рублей – сумма, на
которую к июлю 2026 – 2030 годов уменьшается
долг по сравнению с долгом на июль предыдущего
года,

40 тыс. рублей = b тыс. рублей – сумма, на
которую к июлю 2031 – 2035 годов уменьшается
долг на по сравнению с долгом на июль
предыдущего года.

Пусть $r\% = \frac{r}{100} = k$.

Тогда в соответствии с условием задачи имеем:

Год	В январе банк увеличит долг на ... тыс. рублей	Клиент выплатит ... тыс. рублей	Долг в конце года, тыс. рублей
2025	-	-	S
2026	kS	$kS + a$	$S - a$
2027	$k(S - a) = kS - ka$	$kS - ka + a$	$S - 2a$
2028	$k(S - 2a) = kS - 2ka$	$kS - 2ka + a$	$S - 3a$
2029	$k(S - 3a) = kS - 3ka$	$kS - 3ka + a$	$S - 4a$
2030	$k(S - 4a) = kS - 4ka$	$kS - 4ka + a$	$S - 5a = 200$
2031	$200k$	$200k + b$	$200 - b$
2032	$k(200 - b) = 200k - kb$	$200k - kb + b$	$200 - 2b$
2033	$k(200 - 2b) = 200k - 2kb$	$200k - 2kb + b$	$200 - 3b$
2034	$k(200 - 3b) = 200k - 3kb$	$200k - 3kb + b$	$200 - 4b$
2035	$k(200 - 4b) = 200k - 4kb$	$200k - 4kb + b$	$200 - 5b = 0$

Сумма всех платежей после полного погашения кредита составит

$(5kS + 1000k - 10ka - 10kb + 5a + 5b)$ тыс. рублей. Это (по условию) 1480 тыс. рублей.

Учтём, что $S = 800$, $a = 120$, $b = 40$, тогда получим:

$$5k \cdot 800 + 1000k - 10k \cdot 120 - 10k \cdot 40 + 5 \cdot 120 + 5 \cdot 40 = 1480;$$

$$4000k + 1000k - 1200k - 400k + 600 + 200 = 1480;$$

$$3400k = 680;$$

$$10k = 2;$$

$$k = 0,2.$$

Так как $k = \frac{r}{100}$, то $\frac{r}{100} = 0,2$; $r = 20$.

20 – целое число, что соответствует условию задачи.

Каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года.

Ответ: $r = 20$.

Благодарю за внимание!

Панина Н. А.
+79051620770

